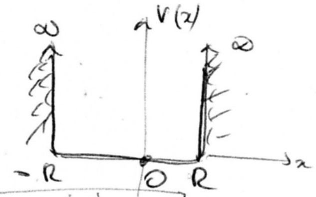
Exo 16 p9 Ref {190, 251}



1°) $\boxed{dP = |\Psi(x,t)|^2 dx}$

2°) $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ avec $\psi(x,t)=f(x)g(t) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dx^2} = i\hbar\times\frac{1}{g}\frac{dg}{dt} = E$

$\Rightarrow \boxed{g(t) = G_0 e^{-iEt/\hbar}}$

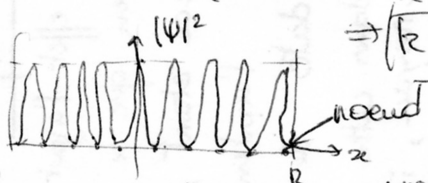
et $\cancel{-\frac{\hbar^2}{2m}}\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{2mEf}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2}+k^2 f = 0 \Rightarrow f(x)=F_0\cos(kx)+F_1\sin(kx)$ avec $\boxed{k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}}$

et $f(-R)=f(R)=0 \Rightarrow F_0\cos(kR) - F_1\sin(kR) = F_0\cos(kR)+F_1\sin(kR) \Rightarrow \boxed{F_1=0}$

et $f(R)=0 \Rightarrow F_0\cos(kR)=0 \Rightarrow kR = n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \boxed{f(x)=F_0\cos(kx)}$

$\Rightarrow \boxed{k=\left(n+\frac12\right)\times\frac{\pi}{R} = N\frac{\pi}{R}}$ avec $n\in\mathbb{N}$: mode et $N = n+\frac12$.

3°) schéma en coupe :



$\Rightarrow \boxed{E_{fondamental} = \frac{\hbar^2}{2m}\times\frac{\pi^2}{4R^2}}$ $(n=0)$

• Noeud $\Rightarrow |\psi|^2=0 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{N\pi x}{R}\right)=0 \Rightarrow \frac{N\pi x_p}{R} = \frac{\pi}{2}+p\pi \Rightarrow N x_p = R\times\left(p+\frac12\right)$ où $p\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \boxed{x_p = R\times\frac{1+2p}{1+2n}}$

• Le 5e noeud se trouve en $x_5 = R$.

càd : $R = R\times\frac{1+2\times5}{1+2\times n} \Rightarrow \boxed{n=5} \Rightarrow k=\frac{11}{2}\frac{\pi}{R} \Rightarrow \boxed{E_5 = \frac{\hbar^2}{2m}\times\left(\frac{11\pi}{2R}\right)^2}$

• Ordre de grandeur $E=\frac12 mv^2 = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \langle E\rangle = \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle$ avec $(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 \le \langle p^2\rangle$

$\Rightarrow \langle E\rangle \ge \frac{1}{2m}(\Delta p)^2$

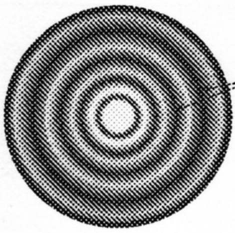
• Heisenberg : $\Delta p \underbrace{\Delta x}_{2R} \ge \hbar \Rightarrow \Delta p \ge \frac{\hbar}{2R} \Rightarrow \boxed{\langle E\rangle \ge \frac{1}{2m}\times\frac{\hbar^2}{4R^2} = E_{fondamental}}$

I- Mines-Ponts (2023)

16– Modèle quantique (2023)

On souhaite calculer l'énergie d'un électron dans un enclos quantique formé de 48 atomes de Fer, qui constitue un cercle de rayon $R = 7,1$ nm.
La densité électronique est représentée sur le schéma.

1. Dans un problème à 1 dimension (1D), relier la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ à la densité de probabilité de présence.
2. On modélise la situation présentée au début en 1D par un puits infini de largeur $2R$.
   On cherche une solution à variables séparées.
   Pourquoi l'appelle-t-on état stationnaire ?
   Résoudre l'équation de Schrödinger.
   Donner les énergies possibles et préciser l'énergie de l'état fondamental.



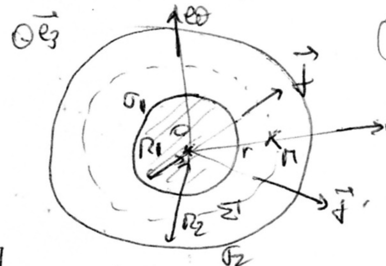
3. Identifier le mode présenté sur le schéma.
   Calculer l'énergie de l'électron.
   Retrouver son ordre de grandeur à partir de l'inégalité de Heisenberg.
4. On modélise maintenant la situation par un puits fini de hauteur h et de largeur $2R$.
   Donner la forme de la fonction d'onde et l'énergie.

Exo 17-a P9 - ref{2001251} -

1°) Gauss : $\Phi_E = \oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS} = E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0 \times 4\pi R_1^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(t<0) = \frac{R_1^2 \sigma_0}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}}$

2°) $\boxed{\vec{j}(r,t) = j(r,t)\,\vec{e_r}}$

3°) $(O\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $(O, \vec{e_r}, \vec{e_3})$ plans de symétrie pour $\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{0}}$



4°) $\cancel{\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}}$ $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow \gamma\vec{E} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial E_r}{\partial t} + \frac{1}{\tau}E_r = 0}$ avec $\boxed{\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}}$; $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

$\Rightarrow E_r(M,t) = E_r(M,0)\,e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{E_r(r,t) = \frac{R_1^2\sigma_0}{\varepsilon_0 r^2}e^{-t/\tau}}$

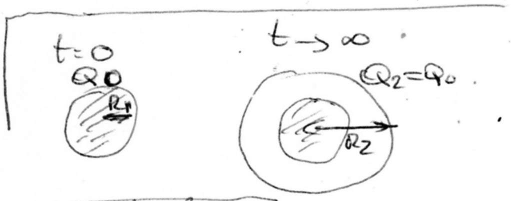
5°) Relation de passage en R_1 : $E_{N2} - E_{N1} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{R_1^2\sigma_0}{\varepsilon_0 R_1^2}e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{\sigma_1(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau}}$

- Conservation de la charge : $Q_1(t) + Q_2(t) = Q_0 \Rightarrow \sigma_0 e^{-t/\tau} \times 4\pi R_1^2 + \sigma_2 \times 4\pi R_2^2 = \sigma_0 \times 4\pi R_1^2$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_2(t) = \frac{R_1^2}{R_2^2}\sigma_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

6°) $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{R_1^2\sigma_0}{\varepsilon_0}e^{-t/\tau}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = 0\ \forall t}$

7°) • Énergie électrique initiale dans l'espace : $\mathcal{E}_i$ avec $\frac{\delta \mathcal{E}_{ini}}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$



$\Rightarrow \mathcal{E}_{ini} = \iiint \frac{\varepsilon_0}{2}E_i^2\,d\tau = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=R_1}^{\infty}\frac{\varepsilon_0}{2}\times\frac{R_1^4\sigma_0^2}{\varepsilon_0^2 r^4}\times\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,r^2\,dr$

$= \frac{R_1^4\sigma_0^2}{2\varepsilon_0}\times 4\pi \times \int_{R_1}^{\infty}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{ini} = \frac{2\pi R_1^4\sigma_0^2}{\varepsilon_0}\times\frac{1}{R_1}}$ et $\boxed{\mathcal{E}_{fin} = \frac{2\pi R_1^4\sigma_0^2}{\varepsilon_0}\times\frac{1}{R_2}}$

• Puissance dissipée par effet Joule : $\frac{\delta P_J}{d\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2 \Rightarrow \frac{\delta W_J}{dt} = P_J = \iiint \gamma E^2\,d\tau$

$\Rightarrow \frac{\delta W_J}{dt} = \iiint \gamma\,\frac{R_1^4\sigma_0^2}{\varepsilon_0^2 r^4}e^{-2t/\tau}\times 4\pi r^2\,dr = \frac{\gamma R_1^4\sigma_0^2}{\varepsilon_0^2}e^{-2t/\tau}\times 4\pi\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

$\Rightarrow W_J = \int_{t=0}^{\infty}\frac{\delta W_J}{dt}\,dt = \frac{4\pi\gamma R_1^4\sigma_0^2}{\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\times\frac{\tau}{2}\left[-e^{-2t/\tau}\right]_0^{\infty} = \frac{4\pi\gamma R_1^4\sigma_0^2}{\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\times\frac{\varepsilon_0}{2\gamma}$

$\Rightarrow \boxed{W_J = \frac{2\pi R_1^4\sigma_0^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$

• Bilan : $W_J = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{ini} = \mathcal{E}_{fin} + W_J}$

I- Mines-Ponts (2023)

17– Électromagnétisme, optique (2023)

a– Exercice 1 : Courant de fuite dans un condensateur sphérique

Soit une sphère de rayon R_1 d'intérieur vide et de densité de charge surfacique initiale σ_0.
Une seconde sphère de rayon R_2, initialement déchargée, entoure la première.
Entre les deux se trouve un gaz initialement neutre, de conductivité γ et de permittivité égale à celle du vide ε_0.
On note $\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(t)$ respectivement la densité de charge surfacique des sphères 1 et 2.
R_1 se décharge à partir de $t = 0$.

1. Exprimer le champ $\vec{E}$ dans le gaz lorsque $t < 0$.
2. Déterminer la direction du vecteur $\vec{j}$ dans l'espace entre les deux sphères.
3. Déterminer le champ $\vec{B}(M,t)$ dans tout l'espace.
4. Donner une équation différentielle sur $\vec{E}(r,t)$ et la résoudre pour avoir son expression.
5. Exprimer $\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(t)$.
6. Le gaz reste-t-il neutre ?
7. Effectuer un bilan énergétique.

<u>Donnée</u> :

– Relations de passage à la traversée d'une interface :

$$E_{n,2} - E_{n,1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E}_{t,2} - \vec{E}_{t,1} = \vec{0}$$

– Divergence d'un vecteur $\vec{A}$ en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)$$

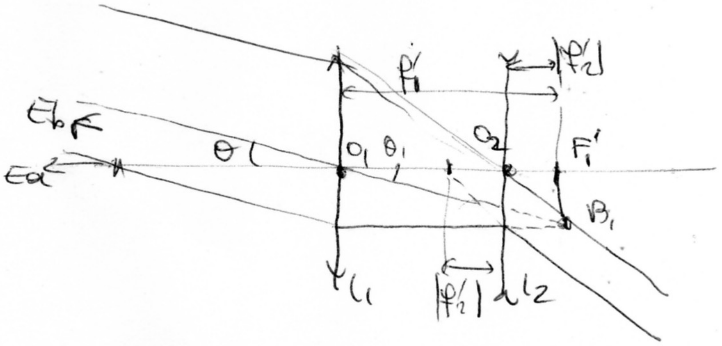
Exo 17 b - P(0.\ref{} 20012513

- $\overline{A_1B_1} = \overline{F_1'B_1}$ avec $\tan\theta = \dfrac{F_1'B_1}{f_1'}$

  $\Rightarrow \boxed{\overline{F_1'B_1} = -f_1' \tan\theta}$

- $\boxed{\overline{O_2F_1'} = |f_2'|}$

- $\boxed{\overline{O_1O_2} = |f_1'| - |f_2'| = f_1' + f_2'}$



I- Mines-Ponts (2023)

b– Exercice 2 : Lunette astronomique

On considère l'objectif d'une lunette astronomique constitué d'une lentille convergente ($f_1' = 8$ cm) suivie d'une lentille divergente ($f_2' = -4$ cm).
L'objectif a un grandissement linéaire $\gamma = 2$. On observe deux étoiles E_a et E_b :
- E_a est sur l'axe optique ;
- E_b fait un angle θ avec E_a.

1. Déterminer $\overline{A_1B_1}$ (image de E_b par L_1), $\overline{O_2F_1'}$ et $\overline{O_1O_2}$.
2. *Autres questions non traitées.*

Exo 18-a p:10 \ ref{21012523} (10)

1°) $m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = q\vec{E} \Rightarrow -mi\omega\vec{v} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{v} = i\frac{q}{m\omega}\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{j} = (nq)\vec{v} = i\underbrace{\frac{ne^2}{m\omega}}_{\gamma}\vec{E}}$ car $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$.

2°) • $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k}\wedge\vec{E} = \omega\vec{B}$

• $\vec{rot}\,\vec{B} = i\vec{k}\wedge\vec{B} = i\vec{k}\wedge\left(\frac{1}{\omega}\vec{k}\wedge\vec{E}\right) = \frac{i}{\omega}\left[\vec{k}\times(\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{E}}_{=0}) - k^2\vec{E}\right] \Rightarrow \vec{rot}\,\vec{B} = -i\frac{k^2}{\omega}\vec{E}$.

• $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -i\frac{k^2}{\omega}\vec{E} = \mu_0\frac{nie^2}{m\omega}\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0(-i\omega\vec{E}) \Rightarrow k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \frac{\mu_0 ne^2}{m} = \mu_0\varepsilon_0(\omega^2-\omega_p^2)$

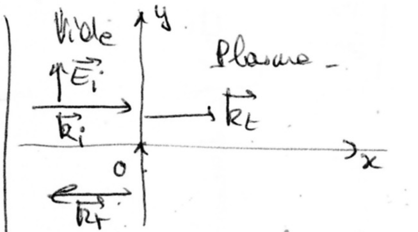
• si $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0 \Rightarrow k = i|k| \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(i|k|x-\omega t)}$ $\Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}$ où $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}}$

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-|k|x}\cos(\omega t) \Rightarrow$ Pas de propagation.

3°) Coefficients de réflexion (r) et de transmission (t):

$$\begin{cases} E_{yi} = E_0 e^{i(\omega t - k_0 x)+\phi_i} \\ E_{yr} = rE_0 e^{i(\omega t + k_0 x)} \\ E_{yt} = tE_0 e^{i(\omega t - kx)} \end{cases}$$

Continuité de E_y en $x=0$ $\Rightarrow \boxed{1+r=t}$ (α)



$\omega\vec{B} = \vec{k}\wedge\vec{E} \Rightarrow$ • $\vec{B}_i = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}k_0\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\E_{iy}\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\k_0E_{iy}\end{pmatrix} \Rightarrow B_{iz} = \frac{k_0}{\omega}e^{i\phi_i}$

• $\vec{B}_r = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}-k_0\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\E_{ry}\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\-k_0E_{ry}\end{pmatrix} \Rightarrow B_{rz} = -\frac{k_0E_0 r}{\omega}e^{i\phi_r}$

• $\vec{B}_t = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}k\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\E_t\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\kE_{ty}\end{pmatrix} \Rightarrow B_{tz} = \frac{k}{\omega}tE_0e^{i\phi_t}$

k_0 dans le vide : $\omega = k_0 c$

Continuité de $\vec{B}$ en $x=0$ et $\forall t \Rightarrow \frac{k_0}{\omega} - \frac{k_0}{\omega}r = \frac{k}{\omega}t = \frac{n}{c}t \Rightarrow \boxed{1-r = nt}$ (β)

(α) et $(\beta) \Rightarrow 1-r = n\times(1+r) \Rightarrow \boxed{r = \frac{1-n}{1+n}}$ et $\boxed{t = 1+r = \frac{2}{1+n}} \Rightarrow 1+n = \cancel{\frac{2}{t} \Rightarrow n}$

$\Rightarrow 1+n = \frac{2}{t} \Rightarrow \boxed{n = \frac{2}{t}-1} = \frac{2}{1{,}5}-1 \Rightarrow \boxed{n = 0{,}33}$

Puissance :

$$\begin{cases} P_i = E_i^2 \\ P_r = E_r^2 \\ P_t = E_t^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{P_r}{P_i} = r^2 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\frac{P_r}{P_{inc}} = \left(\frac{1-0{,}33}{1+0{,}33}\right)^2 = 25\%}$$

I- Mines-Ponts (2023)

18– Électromagnétisme, Mécanique (2023)

a– Exercice 1 : Plasma dilué

On considère un plasma avec une densité d'électrons n, densité volumique de charge nulle et une onde plane progressive harmonique se propageant vers les x croissants et polarisée selon $\vec{u}_y$.

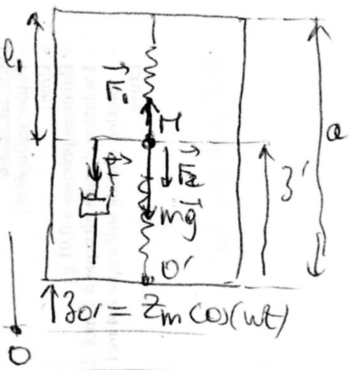
1. Déterminer l'expression de la conductivité complexe.
2. Montrer que si la pulsation est inférieure à une pulsation limite (dont on donnera l'expression), l'onde ne peut pas se propager dans le plasma. Calculer ω_p.
3. L'amplitude de l'onde transmise par le plasma est $1,5$ fois plus grande que celle de l'onde incidente. En déduire l'indice $n(\omega) = \frac{k(\omega)\,c}{\omega}$. Quelle proportion de la puissance est réfléchie ?

Exo 18-b P10 \ref{2101253}.

1°) Dans $\mathcal{R}'$ • $\vec{F}_1 = -k(\ell_1-\ell_0)(-\vec{u}_z) = k(\ell_1-\ell_0)\vec{u}_z = k(a-z'-\ell_0)\vec{u}_z$ car $\ell_1+z'=a$

• $\vec{F}_2 = -k(\ell_2-\ell_0)\vec{u}_z = -k(z'-\ell_0)\vec{u}_z$

• $\vec{F}_{ent} = -m\vec{a}_e = -m\frac{d^2OO'}{dt^2} = m\omega^2 Z_m\cos(\omega t)\vec{e}_z$.



PFD : $m\frac{d^2z'}{dt^2} = k(a-z'-\ell_0) - k(z'-\ell_0) + m\omega^2 Z_m\cos(\omega t) - \lambda\frac{dz'}{dt} - mg$

$\boxed{m\frac{d^2z'}{dt^2} = k(a-2z') + m\omega^2 Z_m\cos(\omega t) - \lambda\frac{dz'}{dt} - mg}$ (α)

2°) Equilibre $\Rightarrow k(a-2z'_e) - mg = 0 \Rightarrow mg = k(a-2z'_e)$ (β) $\Rightarrow \boxed{z'_e = \frac{1}{2}\left(a-\frac{mg}{k}\right)}$

3°) (α) et (β) $\rightarrow m\frac{d^2z'}{dt^2} = k(\underbrace{a-2z'-a+2z'_e}_{2(z'_e-z')}) - \lambda\frac{dz'}{dt} + m\omega^2 Z_m\cos(\omega t)$ avec $Z = z'-z'_e$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dZ}{dt} + \frac{2k}{m}Z = \omega^2 Z_m\cos(\omega t)}$ soit $\underline{Z}(\omega) = Z_0 e^{i\omega t}$.

$\Rightarrow \underline{Z}\left[\omega_0^2-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\right] = \omega^2 Z_m e^{i\omega t}$ où $\boxed{Q=\frac{m\omega_0}{\lambda}}$ & $\boxed{\omega_0^2=\frac{2k}{m}}$

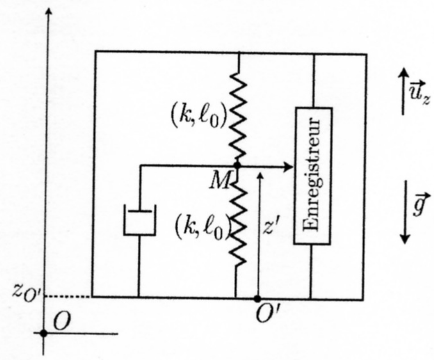
$\Rightarrow \boxed{\underline{Z} = Z_0 e^{i(\omega t-\varphi)}}$ où $\boxed{Z_0 = \frac{\omega^2 Z_m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\frac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2}}}}$ et $\boxed{\tan\varphi = \frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2-\omega^2)}}$

4°) $\boxed{Z_0 \simeq Z_m \text{ pour } \omega \gg \omega_0}$

I- Mines-Ponts (2023)

b– Exercice 2 : Sismographe élémentaire

On considère le système suivant :



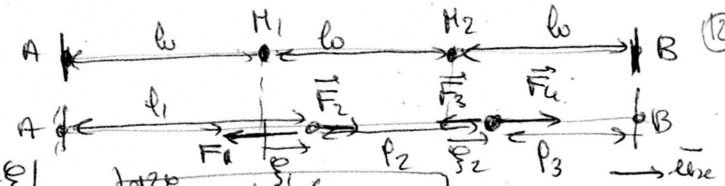
où $z_{O'}(t) = Z_m\cos(\omega t)$ modélise un tremblement de terre.
On suppose que l'amortisseur applique une force :

$$\vec{f} = -\lambda\frac{dz'}{dt}\vec{e}_x$$

sur la masse M du point oscillant.
Les deux ressorts sont identiques.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par z'.
2. Exprimer la position d'équilibre z'_{eq}.
3. On pose $Z = z' - z'_{eq}$ et on note $\underline{Z}(\omega)$ l'amplitude complexe de la fonction $t \mapsto z'(t)$ en régime forcé à la pulsation ω.
   Donner l'expression de $\underline{Z}(\omega)$ et préciser les limites à basse et haute fréquences.
4. Comment doit-on choisir ω par rapport à la pulsation propre ω_0 pour que l'amplitude enregistrée soit proche de celle imposée par le séisme ?

Exo 19 p11 \ ref 2105 2443 ⑫



1°) $\vec{F_4} = -K(\ell_3-\ell_0)\times(-\vec{u_x}) = -K\xi_2\vec{u_x}$

• $\vec{F_3} = -K(\xi_2-\xi_1)\vec{u_x}$ ⇒ $m\frac{d^2\xi_2}{dt^2} = K(-\xi_2-\xi_2+\xi_1)$ ⇒ $\boxed{\frac{d^2\xi_2}{dt^2} = \frac{K}{m}(\xi_1-2\xi_2)}$ (α)

• $\vec{F_2} = -\vec{F_3} = K(\xi_2-\xi_1)\vec{u_x}$

• $\vec{F_1} = -K\xi_1\vec{u_x}$ ⇒ $\boxed{\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{K}{m}(\xi_2-2\xi_1)}$ (β)

soit $\boxed{\alpha \hat{=} \frac{K}{m}}$

$\xi_1 = A_1\cos(\omega t)$
$\xi_2 = A_2\cos(\omega t)$

2°) (α) ⇒ $-A_2\omega^2 = \alpha(A_1-2A_2)$
(β) ⇒ $-A_1\omega^2 = \alpha(A_2-2A_1)$ ⇒ $\begin{cases}\alpha A_1 + (\omega^2-2\alpha)A_2 = 0\\ (\omega^2-2\alpha)A_1 + \alpha A_2 = 0\end{cases}$ ⇒ $\begin{pmatrix}\alpha & \omega^2-2\alpha\\ \omega^2-2\alpha & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

avec $\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix} \neq 0$ ⇒ $\det(M) = 0$ ⇒ $\alpha^2-(\omega^2-2\alpha)^2 = 0$ ⇒ $(\alpha-\omega^2+2\alpha)(\alpha+\omega^2-2\alpha) = 0$

⇒ $\omega^2 = 3\alpha$ ou $\omega^2 = \alpha$ ⇒ $\boxed{\omega'' = \sqrt{3K/m} \text{ ou } \omega' = \sqrt{K/m}}$

3°) * pour $\omega^2 = \alpha$: $\alpha A_1 + (\alpha-2\alpha)A_2 = 0$ ⇒ $\boxed{A_1 = A_2}$ vibration en phase

* pour $\omega^2 = 3\alpha$: $\alpha A_1 + (3\alpha-2\alpha)A_2 = 0$ ⇒ $\boxed{A_2 = -A_1}$ → opposition de phase

4°) (α)+(β) ⇒ $\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \alpha\left(\frac{-\xi_1-\xi_2}{2}\right) = -\alpha\sigma$ ⇒ $\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \alpha\sigma = 0$ ⇒ $\boxed{\sigma = A_1\cos(\omega' t) + A_2 \cancel{\cos}\sin(\omega' t)}$

(β)−(α) ⇒ $\frac{d^2\delta}{dt^2} = \alpha\left(\frac{3\xi_2-3\xi_1}{2}\right)$ ⇒ $\frac{d^2\delta}{dt^2} + \omega''\delta = 0$ ⇒ $\boxed{\delta = B_1\cos(\omega'' t) + B_2\sin(\omega'' t)}$

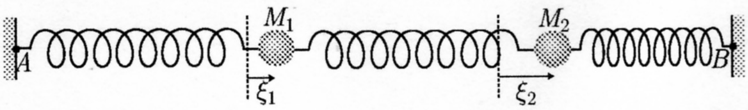
5°) Conditions initiales : * $\dot\xi_1 = \dot\xi_2 = 0$ ⇒ $\begin{cases}\dot\sigma(0) = 0 ⇒ A_2 = 0\\ \dot\delta(0) = 0 ⇒ B_2 = 0\end{cases}$ ⇒ $\sigma = A_1\cos(\omega' t)$, $\delta = B_1\cos(\omega'' t)$

* $\begin{cases}\sigma(0) = a\\ \delta(0) = -a\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}\sigma = a\cos(\omega' t)\\ \delta = -a\cos(\omega'' t)\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}\frac{\xi_1+\xi_2}{2} = a\cos(\omega' t)\\ \frac{\xi_1-\xi_2}{2} = -a\cos(\omega'' t)\end{cases}$

⇒ $\boxed{\begin{array}{l}\xi_1 = a(\cos\omega' t - \cos\omega'' t)\\ \xi_2 = a(\cos\omega' t + \cos\omega'' t)\end{array}}$

I- Mines-Ponts (2023)

19– Oscillateurs couplés (2023)



Deux masses identiques m sont reliées entre elles et à des points fixes A et B par trois ressorts de même longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur K. Elles sont astreintes à se déplacer sans frottements selon l'axe Ox exclusivement. On note ξ_1 et ξ_2 le déplacement des masses par rapport à leurs positions d'équilibre. À l'équilibre, les ressorts sont de longueur égale à leur longueur à vide.

On veut étudier les modes propres du système.

1. Établir les équations différentielles sur ξ_1 et ξ_2.
2. On impose $\xi_1(t) = A_1 \cos(\omega t)$ et $\xi_2(t) = A_2 \cos(\omega t)$. Montrer que ceci n'est possible que pour ω valant $\omega' = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ou $\omega'' = \sqrt{\frac{3K}{m}}$.
3. Décrire, pour chacun de ces modes, le mouvement relatif des deux masses.
4. On pose $\sigma = \frac{\xi_1+\xi_2}{2}$ et $\delta = \frac{\xi_1-\xi_2}{2}$. Calculer les expressions générales de $\sigma(t)$ et $\delta(t)$.
5. On déplace initialement la masse 2 d'une distance a dans le sens des x croissants, la masse 1 restant initialement à sa position d'équilibre. Les deux masses sont lâchées sans vitesse initiale. Donner les expressions de $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ et les commenter.
6. On applique une force $F_1 \cos(\omega t)\,\vec{u}_x$ à la masse 1. Montrer qu'il existe deux pulsations de résonance.