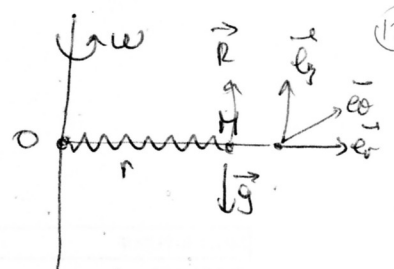


- 1) Bilan des forces :
- Force élastique  $\vec{F}_{el} = -k(r-l_0)\vec{e}_r$
  - Force d'entraînement  $\vec{F}_{ent} = m\omega^2 r\vec{e}_r$
  - $\vec{R}$  : Réaction de la tige  $\vec{R} \perp \vec{e}_r$
  - Poids  $m\vec{g} + \vec{e}_z$ .



PFD dans le référentiel tournant :  $m\ddot{r}\vec{e}_r = -k(r-l_0)\vec{e}_r + m\omega^2 r\vec{e}_r + \vec{R} + m\vec{g}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} + (k - m\omega^2)r - kl_0 = 0 \\ 0 + (k - m\omega^2)re - kl_0 = 0 \text{ @ l'équilibre} \end{cases}$$

2)  $m\ddot{r} + (k - m\omega^2)(r - r_e) = 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{k - m\omega^2}{m}\varepsilon = 0$  avec  $\varepsilon = r - r_e$

\* si  $k > m\omega^2$  :  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}$

\* si  $k < m\omega^2$  :  $\varepsilon = A e^{kt} + B e^{-kt}$  avec  $k = \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}$

3)  $\varphi$  cons :  $m\omega^2 r\vec{e}_r = -\text{grad } \mathcal{E}_p = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r} \Rightarrow \mathcal{E}_{p, \text{ent}} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2$

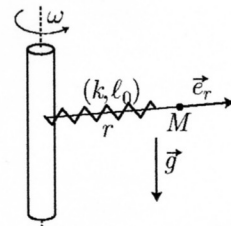
## I- Mines-Ponts (2023)

### 20-- Système en rotation masse-ressort (2023)

On considère une tige verticale à laquelle est accolé un ressort en rotation autour de celle-ci.

On considère le référentiel  $\mathcal{R}$  (en rotation uniforme à la vitesse angulaire  $\omega$  autour d'un référentiel supposé galiléen passant par l'axe  $z$ ) dans lequel la position du point est repérée par la fonction  $r(t)$ .

1. Déterminer, dans  $\mathcal{R}$ , l'équation différentielle vérifiée par  $r(t)$ .
2. Montrer qu'il y a deux types de mouvements possibles.
3. Montrer que, dans notre cas, la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle que l'on précisera.

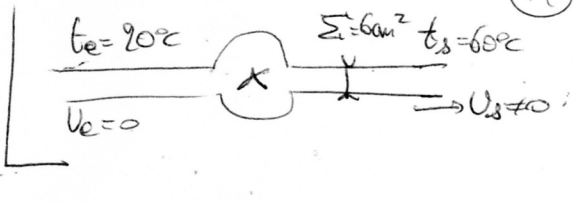


Exo 21-a (ref) 250/2513.

$$2^o) \Delta(h+ct+ep) = wu + q \Rightarrow \frac{dm}{dt} (h+ct+ep) = \frac{dm}{dt} + \frac{dq}{dt} = P$$

$$Dm = \frac{dm}{dt} = \mu \Sigma v$$

$$\Rightarrow P = \mu \Sigma v \left[ \rho (t_s - t_e) + \frac{\rho}{2} v_s^2 \right]$$



## I- Mines-Ponts (2023)

### 21- Thermodynamique, électrostatique (2023)

#### a- Sèche-cheveux

On considère un sèche-cheveux qu'on modélise par un ventilateur pour créer un courant d'air et une résistance pour chauffer l'air.

On se place en régime stationnaire et on donne :

- la température d'entrée :  $t_e = 20^\circ\text{C}$  ;
- la température de sortie  $t_s = 60^\circ\text{C}$  et la section de sortie  $\Sigma_s = 6 \text{ cm}^2$ .

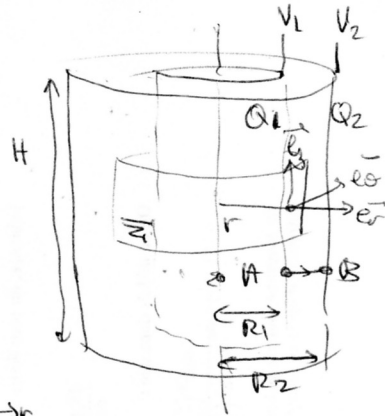
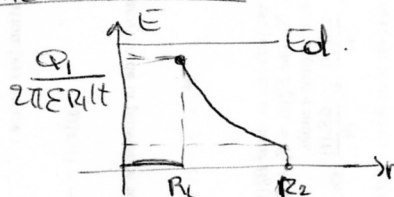
1. Démontrer le premier principe industriel.
2. La puissance fournie à l'appareil est  $P = 2000 \text{ W}$ .

Déterminer comment se répartit cette puissance entre le ventilateur et la résistance chauffante.

• Th. de Gauss:  $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \times 2\pi r H = \frac{Q_1}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{Q_1}{2\pi r H \epsilon}$

•  $U = V_1 - V_2 = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{Or} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi H \epsilon} \frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{Q_1}{2\pi H \epsilon} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = U \quad (*)$

• Hypothèse:  $E < E_d \Rightarrow \frac{Q_1}{2\pi \epsilon r H} < E_d$   
 $\Rightarrow \frac{Q_1}{2\pi \epsilon H} < E_d \times R_1$



• (d)  $\Rightarrow U < \frac{E_d \times R_1 \times \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\epsilon} = U_{max}$

• Majoration de  $U_{max}$ :  $\frac{\partial U_{max}}{\partial R_1} = E_d \times \left[ \ln\left(\frac{R_2}{R_{1opt}}\right) - 1 \right] = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{R_2}{R_{1opt}}\right) = 1$   
 $\Rightarrow R_{1opt} = \frac{R_2}{e}$

### I- Mines-Ponts (2023)

#### b- Condensateur et étincelle

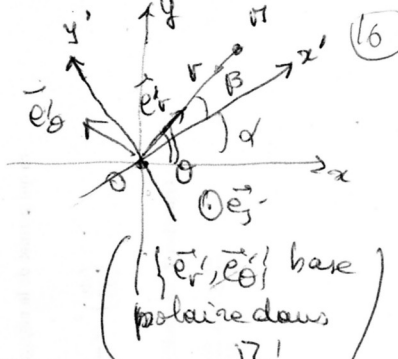
On considère un condensateur cylindrique formé de 2 conducteurs  $C_1$  et  $C_2$  coaxiaux, d'axe  $Oz$ , de même hauteur  $H$ .

- $C_1$  occupe le domaine  $0 \leq r \leq R_1$  ;
- $C_2$  occupe le domaine  $R_2 \leq r \leq R_3$ .

L'espace inter-armatures  $R_1 < r < R_2$  est constitué d'un milieu isolant de permittivité électrique  $\epsilon = 10 \epsilon_0$ .

Déterminer le rayon  $R_{1opt}$ , à  $R_2$  et  $H$  fixés, qui maximise la différence de potentiel  $U$  entre  $C_1$  et  $C_2$  sans créer d'étincelle.

On notera  $E_d$  le champ disruptif dans le matériau, c'est-à-dire pour lequel celui-ci s'ionise brutalement (avalanche d'électrons).



1)  $\theta = \alpha + \beta$

$P = m\vec{g}$

• Réaction du disque D sur la souris S:  $\vec{R}_{D/S}$

•  $\vec{F}_{\text{cent}} = m r \dot{\alpha}^2 \vec{e}_r$

•  $\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/S} = 2m r \dot{\alpha} \dot{\beta} \vec{e}_\theta$

2) Bilan souris

$\vec{v}_{M/S} = r \dot{\beta} \vec{e}_\theta$

PFD:  $m[-r \dot{\beta}^2 \vec{e}_r + r \ddot{\beta} \vec{e}_\theta] = m\vec{g} + \vec{R}_{D/S} + m r \dot{\alpha}^2 \vec{e}_r + 2m r \dot{\alpha} \dot{\beta} \vec{e}_\theta$

→ Réaction de la souris sur le disque:

$\vec{R}_{S/D} = -\vec{R}_{D/S} = m\vec{g} + m r \dot{\alpha}^2 \vec{e}_r + 2m r \dot{\alpha} \dot{\beta} \vec{e}_\theta + m r \dot{\beta}^2 \vec{e}_r - m r \dot{\beta} \vec{e}_\theta$

• Bilan sur le disque:

$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \vec{e}_z = \vec{O} \wedge \vec{R}_{S/D} = r \vec{e}_r \wedge (m r \dot{\beta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\beta} \vec{e}_z$

$\Rightarrow J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = m r^2 \frac{d^2 \beta}{dt^2} \Rightarrow J \frac{d\alpha}{dt} = m r^2 \frac{d\beta}{dt} + Cte$

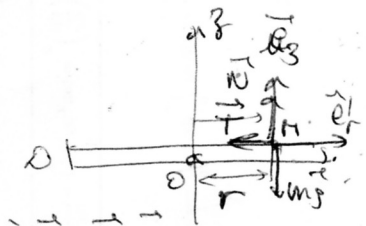
$\Rightarrow J \alpha = m r^2 \beta$  si on suppose que  $\alpha(0) = \beta(0) = 0$

• Question 1)  $\Rightarrow \theta = \alpha + \beta = \beta(1 + \frac{m r^2}{J}) \Rightarrow \theta = 2\pi(1 + \frac{m r^2}{J})$

3) Hypothèse: souris immobile.  $\Rightarrow m \vec{a}_{M/S} = \vec{0} = \vec{R} + \vec{F}_{\text{cent}} + m\vec{g}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -T \\ N \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} + \begin{pmatrix} m r \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m g \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow N = m r g \text{ et } T = m r \omega^2$

Pas de glissement si  $\frac{|T|}{|N|} \leq \mu \Rightarrow \frac{m r \omega^2}{m r g} \leq \mu \Rightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$



I- Mines-Ponts (2023)

22- Mécanique, électrocinétique (2023)

a- Exercice 1 : souris sur un disque en rotation

On considère un disque (D) homogène, d'axe Oz, de rayon R, de moment d'inertie J par rapport à Oz.

Une souris (S), assimilée à un point matériel, se situe initialement à une distance r de Oz.

On pourra introduire deux référentiels :

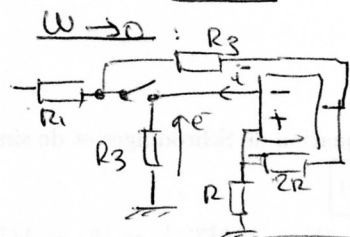
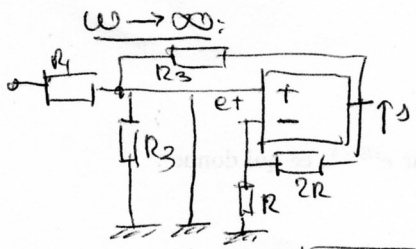
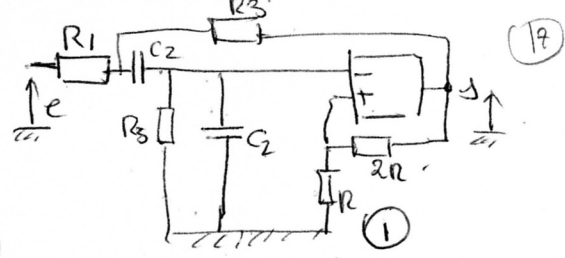
- $\mathcal{R} = (Oxyz)$  du laboratoire, supposé galiléen ;
- $\mathcal{R}' = (Ox'y'z)$  en rotation autour de Oz, d'angle  $\alpha(t)$ .

Dans  $\mathcal{R}'$ , on repérera par un angle  $\beta(t)$  la position angulaire de la souris.

La liaison du disque autour de l'axe vertical Oz est un pivot parfait.

1. Exprimer l'angle  $\theta$  repérant la position angulaire de la souris dans  $\mathcal{R}$ .
2. La souris se met à tourner autour de Oz (non nécessairement uniformément).  
Quel est l'angle  $\theta$  que fait la souris avec Ox lorsqu'elle a fait un tour complet sur le disque (i.e.  $\beta = 2\pi$ ) ?
3. On donne à (D) un mouvement circulaire uniforme dans  $\mathcal{R}$  à la vitesse angulaire  $\omega$ .  
On note  $\mu$  le coefficient de frottement solide de la souris par rapport au disque.  
À quelle condition la souris ne glisse-t-elle pas sur le disque ?

1) Circuits équivalents  $\Rightarrow$  à (1) avec, pont diviseur  $\Rightarrow s = 3e^-$

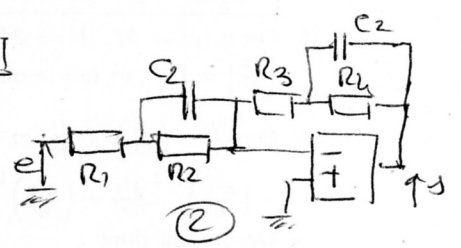
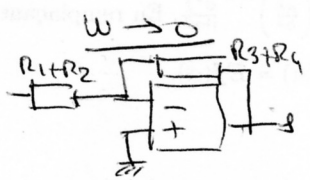
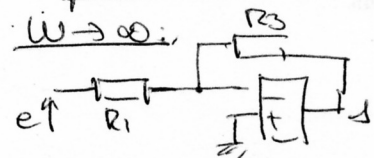


$\Rightarrow$  Circuit 1: OTC

$e^+ = 0 \Rightarrow e^- = 0 \Rightarrow s = 0$

$e^- = R_3 i^- = 0 \Rightarrow s = 3e^- = 0$

Équivalent à (2):

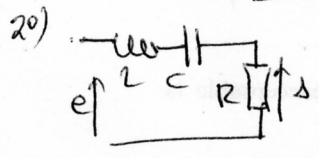


$\Rightarrow$  Circuit 2: NON!

Poutage amplificateur inverseur:

$s = -\frac{R_3}{R_1} e^- \neq 0$

$s = -\frac{R_3 R_4}{R_1 R_2} e^- \neq 0$



$H = \frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{1}{1 + j\omega(\frac{L}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \Rightarrow |H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2(\frac{L}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$

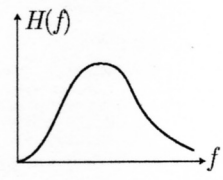


I- Mines-Ponts (2023)

b- Exercice 2 : Reconnaissance d'un filtre

Un filtre est caractérisé par un module de la fonction de transfert ci-dessous.

On donne les deux circuits ci-dessous.



1. Lequel de ces circuits conduit à ce graphe ?
2. Quel circuit simple comportant une résistance  $R$ , une inductance  $L$  et une capacité  $C$  conduit à une allure similaire ?

