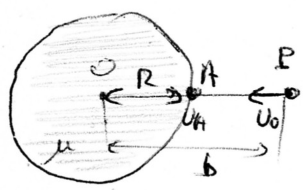
Exo 23p13 - 1707251 ①



1°) Gauss gravitationnel: $\Phi_g = g \times 4\pi r^2 = -4\pi G M_{int}$

• si $r>R$: $M_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu \Rightarrow g \times 4\pi r^2 = -G\frac{4}{3}\pi R^3 \mu \Rightarrow \boxed{g(r>R) = -\frac{4\pi G\mu R^3}{3r^2}}$

• si $r<R$ $M_{int} = \mu \times \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \boxed{g(r<R) = -\frac{4\pi G\mu r}{3}}$

De P à A : PFD ⇒ $\cancel{m}\ddot r = -\frac{4\pi G\mu R^3}{3r^2}\cancel{m} \Rightarrow \dot r \ddot r = -\frac{4\pi G\mu R^3}{3}\frac{\dot r}{r^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot r^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi G\mu R^3}{3r}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\mu R^3}{3r} = v$ car $v_\infty = 0$.

$\Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{8\pi G\mu R^3}{3b}}}$ et $\boxed{v_A = \sqrt{\frac{8\pi G\mu R^3}{3R}}}$

2°) De P à A : $\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{8\pi G\mu R^3}{3}} \times \frac{1}{\sqrt r} \Rightarrow \int_{t_P}^{t_A} dt \times \sqrt{\frac{8\pi G\mu R^3}{3}} = -\int_b^R \sqrt r\, dr = \left[-\frac{2}{3} r^{3/2}\right]_b^R$

$\Rightarrow \boxed{\Delta t_{PA} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\mu R^3}} \times \frac{2}{3}\left(b^{3/2} - R^{3/2}\right)}$

De A à O : PFD ⇒ $\ddot r = -\frac{4\pi G\mu r}{3} \Rightarrow \dot r\ddot r = -\frac{4\pi G\mu}{3} r\dot r \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot r^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{4\pi G\mu}{3}\frac{r^2}{2}\right)$

$\Rightarrow (\dot r)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{4\pi G\mu}{3} r^2 + K$ avec $v_A = \sqrt{\frac{8\pi G\mu R^3}{3R}}$

$\Rightarrow (\dot r)^2 = K = v_A^2 + \frac{4\pi G\mu R^2}{3} \Rightarrow (\dot r)^2 = v_A^2 - \frac{4\pi G\mu}{3}(r^2 - R^2)$

$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\sqrt{v_A^2 + \frac{4\pi G\mu R^2}{3} - \frac{4\pi G\mu r^2}{3}} \Rightarrow \int_{t_A}^{t_O} dt = \int_R^0 \frac{-dr}{\sqrt{v_A^2 + \frac{4\pi G\mu R^2}{3} - \frac{4\pi G\mu}{3} r^2}}$

changement de variable: $\frac{4\pi G\mu}{3} r^2 = \left(v_A^2 + \frac{4\pi G\mu R^2}{3}\right)\sin^2 u$.

$\Rightarrow \Delta t_{AO} = \int_0^{u_0} \sqrt{\frac{3}{4\pi G\mu}\left(v_A^2+\frac{4\pi G\mu R^2}{3}\right)} \frac{\cos u\, du}{\sqrt{v_A^2+\frac{4\pi G\mu R^2}{3}}\cos u}$ où $\boxed{\sin u_0 = \frac{\sqrt{\frac{4\pi G\mu}{3}}R}{\sqrt{v_A^2+\frac{4\pi G\mu R^2}{3}}}}$

$\boxed{\Delta t_{AO} = \sqrt{\frac{3}{4\pi G\mu}}\, u_0}$

I- Mines-Ponts (2024)

23– Mécanique, thermodynamique (Bourisseau, 2024)

a– Exercice 1 : Mouvement d'un caillou

On considère un nuage de poussières, isolé de tout astre, de masse volumique μ, sphérique de rayon R et de centre O. Un petit caillou P, en dehors du nuage à une distance b de O, arrive avec une vitesse $\vec{v}_0$ orientée vers le centre du nuage.

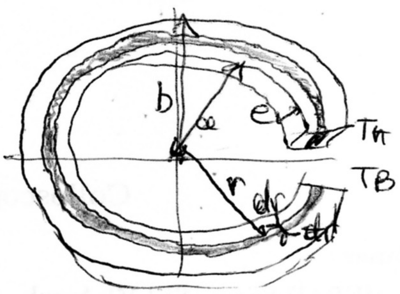
1. En supposant que la vitesse est nulle à l'infini, donner l'expression de v_0, vitesse de P à b.
2. Donner le temps que met le caillou pour aller de b à O.

Ex028-b-P13 - 1707252

(2)

Résistance thermique de l'anneau élémentaire de rayon r, largeur dr, épaisseur e :

$$\delta R_{th} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{2\pi r}{e\,dr} \Rightarrow \delta G_{th} = \frac{1}{\delta R_{th}} = \frac{e\lambda}{2\pi}\,\frac{dr}{r}$$



Résistances en parallèle entre A et B

$$\Rightarrow G_{th} = \int \delta G_{th} = \frac{e\lambda}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{e\lambda}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{1}{G_{th}} = \frac{2\pi}{e\lambda\ln(b/a)} \quad \text{or } \Delta T = R_{th}\Phi \Rightarrow \boxed{\Phi = \Delta T \times \frac{\lambda e}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

I- Mines-Ponts (2024)

b– Exercice 2 : Répartition de température dans un anneau

On considère un anneau de rayon extérieur b, de rayon intérieur a et d'épaisseur e, avec une petite entaille. De chaque côté de l'entaille on place un thermostat, à gauche un thermostat de température T_A et à droite de température T_B.

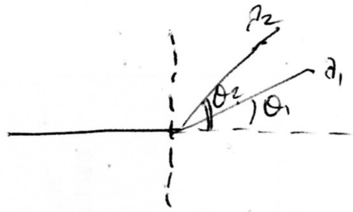
Donner l'expression du flux thermique traverseant l'anneau.

Données : opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :

- Laplacien : $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- Gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$

Exo 24-a-P1h-1807251

1°) $|\sin\theta| = \left|\frac{p\lambda_1}{a}\right| \leqslant 1 \Rightarrow |p| \leqslant \frac{a}{\lambda_1} = \frac{1}{n\lambda_1} \Rightarrow \boxed{|p| \leqslant 8 \Rightarrow 17 \text{ ordres visibles}}$



2°) $\sin\theta_1 = p\frac{\lambda_1}{a} = \frac{3\lambda_1}{a} \Rightarrow 3\lambda_1 n \Rightarrow \boxed{\theta_1 = 20{,}7°}$

$n = \frac{1}{a} = 200 \text{ tr/mm} = 2\cdot 10^5 \text{ tr/m}$

$\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta \Rightarrow \sin\theta_2 = p\frac{\lambda_2}{a} = \sin(\theta_1 + \Delta\theta)$

$\Rightarrow \sin\theta_1 + \Delta\theta\cos\theta_1 = p\frac{\lambda_2}{a} \Rightarrow \Delta\theta\cos\theta_1 = p\frac{\Delta\lambda}{a}$

$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{p\,\Delta\lambda\, n}{\cos\theta_1} = \frac{3 \times 2\cdot 10^5 \times 0{,}6\cdot 10^{-9}}{\cos(20{,}7°)} \Rightarrow \boxed{\Delta\theta = 3{,}8\cdot 10^{-4} \text{ rad}}$

I- Mines-Ponts (2024)

24– Optique, thermodynamique (De Courville, 2024)

a– Exercice de cours 1 : Réseau à N fentes

Réseau à N fentes. Interférences, dispositif de TP. Comparaison avec un dispositif à 2 ondes.
On choisit un réseau avec 200 traits par millimètre, pour étudier le doublet du sodium $\lambda_1 = 589$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm.

1. Combien d'ordres sont visibles ?
2. Pour l'ordre $p = 3$, quel est l'écart angulaire entre les deux longueurs d'onde ?

$Q_{\text{reçue par l'eau}} = Q_{eau} = \Delta H_{eau}$ $\quad H_2O_{liq} \xrightarrow{m(T_{fus}-T_0)c_\ell} H_2O_{liq} \xrightarrow{-mL_{fus}} H_2O_{sol} \xrightarrow{mc_g(T_1-T_{fus})} H_2O_{sol}$

$T_0 = 20°C \qquad T_{fus} = 0°C \qquad T_{fus} \qquad T_1$

ΔH

$\Rightarrow Q_{eau} = mc_\ell(T_{fus}-T_0) - mL_{fus} + mc_g(T_1-T_{fus})$

$= 1 \times 4180 \times (-20) - 1 \times 333{,}5 \cdot 10^3 + 1 \times 2200 \times (-10) \Rightarrow \boxed{Q_{eau} = -4{,}391 \cdot 10^5\ \text{J}}$

Machine frigo :

T_c

$\uparrow Q_c$

Frigo $\leftarrow W$

$\uparrow Q_f = -Q_{eau}$

eau

- $W + Q_c + Q_f = 0 \Rightarrow \cancel{Q_f = -\frac{T_c}{T_f} Q_f}$
- $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \Rightarrow Q_c = -\frac{T_c}{T_f} Q_f$
- $W = Q_c + Q_f = Q_f\left(1 - \frac{T_c}{T_f}\right) = Q_f \times \frac{T_f - T_c}{T_f}$

$\Rightarrow W = P \times \Delta t = Q_f \times \frac{T_c - T_f}{T_f} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{Q_f}{P} \times \frac{T_c - T_f}{T_f}}$

Hypothèses :

T_c = température ambiante de la cuisine ($T_c \simeq 298$ K).

T_f = température à l'intérieur du frigo ($T_f \simeq -10°C = 263$ K)

$\Rightarrow \Delta t = \frac{4{,}391 \cdot 10^5}{5000} \times \frac{308}{263} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 102\ \text{s}}$ C'est rapide !!

I- Mines-Ponts (2024)

b– Exercice 2 : Machine à glace

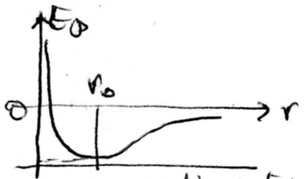
On considère une machine à glace de puissance $P = 5$ kW. Quel est le temps minimal pour transformer 1 kg d'eau, à $T_0 = 20$°C, en glace à $T_1 = -10$°C ?
Quelle est l'efficacité de cette machine ?
<u>Données :</u>

$$c_{\text{eau}} = 4,18\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$
$$c_{\text{glace}} = 2,2\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$
$$L_{\text{fusion}} = 333,5\ \text{kJ.kg}^{-1}$$

Exo 25p14-1907251

(5)

1°) $E_p = \frac{\alpha}{r^n} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = E_p(\text{répulsion}) + E_p(\text{attraction})$



$A - B \xrightarrow{\text{dissociation}} A + B$

$E_p(r_0)$ $\qquad$ $E_p(\infty) = 0$

2°) $\frac{dE_p}{dr} = -\frac{\alpha n}{r^{n+1}} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \frac{\alpha n}{r_0^{n+1}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{q^2 r_0^{n-1}}{4\pi\varepsilon_0 n}}$

3°) $E_{dissociation} = E_p(\infty) - E_p(r_0)$ pour 1 molécule.

$E_p(r_0) = \frac{1}{r_0^n}\times\frac{q^2 r_0^{n-1}}{4\pi\varepsilon_0 n} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left(\frac{1}{n} - 1\right) \Rightarrow \boxed{e_d = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left(\frac{n-1}{n}\right)} \simeq \frac{(1,6\cdot10^{-19})^2 \times 9\cdot10^{9}}{10^{-10}} \times \frac{9}{10}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta H_{disso} = \mathcal{N}_A e_d} = 6,02\cdot10^{23}\times e_d = \boxed{1248\,kJ\cdot mol^{-1}} \Rightarrow \boxed{e_d \simeq 2,07\cdot10^{-18}\,J}$

4°) $\frac{d^2E_p}{dr^2}\Big|_{r_0} = \frac{n(n+1)\alpha}{r_0^{n+2}} - \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} = \frac{n(n+1)}{r_0^{n+2}}\times\frac{q^2 r_0^{n-1}}{4\pi\varepsilon_0 n} - \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}\Big[\underbrace{\frac{n(n+1)}{n} - 2}_{n-1}\Big].$

$\Rightarrow \frac{d^2E_p}{dr^2}\Big|_{r_0} = \frac{n e_d}{r_0^2} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\times\frac{n e_d}{r_0^2}}}$ avec $m \simeq \frac{M}{\mathcal{N}_A} \Rightarrow \omega_0 \simeq \sqrt{\frac{6,02\cdot10^{23}}{2\cdot10^{-3}}\times\frac{10\times2\cdot10^{-18}}{(10^{-10})^2}}$

$\Rightarrow \boxed{\omega_0 \simeq 7,7\cdot10^{14}\,rad/s} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 2,4\cdot10^{-6}\,m} = 2400\,nm \rightarrow \boxed{IR}$

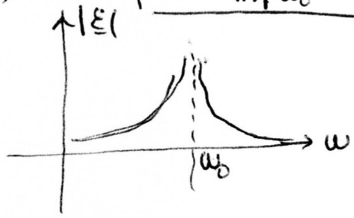
5°) $E_p(r) = E_p(r_0+\varepsilon) \simeq E_p(r_0) + \varepsilon\underbrace{\frac{\partial E_p}{\partial r}\Big|_{r_0}}_{=0} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2E_p}{dr^2}\Big|_{r_0} = E_p(r_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\times m\omega_0^2 \simeq E_p(r_0) + \frac{m\omega_0^2}{2}(r-r_0)^2$

• $\Rightarrow \vec{F}_1 = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p = -\frac{dE_p}{dr}\vec{e_r} = -m\omega_0^2(r-r_0)\vec{e_r} \Rightarrow \boxed{\vec{F_1} = -m\omega_0^2\,\varepsilon\,\vec{e_r}}$

• PFD $\Rightarrow m\ddot{\varepsilon} = F_1 + qE = -m\omega_0^2\varepsilon + qE_0\cos(\omega t)$.

$\Rightarrow \boxed{m\ddot{\varepsilon} + m\omega_0^2\varepsilon = qE_0\cos(\omega t)} \Rightarrow m\ddot{\underline{\varepsilon}} + m\omega_0^2\underline{\varepsilon} = qE_0e^{j\omega t}$

$\Rightarrow m(\omega_0^2-\omega^2)\underline{\varepsilon} = qE_0e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\varepsilon} = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}e^{j\omega t} \Rightarrow \boxed{|\varepsilon| = \frac{qE_0}{m|\omega_0^2-\omega^2|}}$



I- Mines-Ponts (2024)

25– Étude d'une molécule polaire (Desvallée, 2024)

On considère une molécule polaire composée de deux atomes ponctuels A et B, tels que $m_B \ll m_A$. On note $r = AB$.

L'énergie potentielle de cette molécule s'exprime en fonction de r :

$$E_p(r) = \frac{\alpha}{r^n} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

avec n de l'ordre de 10 et $\alpha > 0$.

1. Interpréter les deux termes de $E_p(r)$; tracer son graphe.
2. Le système est à l'équilibre pour $r = r_0$; exprimer α.
3. Exprimer puis calculer numériquement l'énergie de dissociation E_d de la molécule ; interpréter.
4. Calculer numériquement la pulsation ω_0 des petites oscillations de r autour de r_0.
   Calculer la longueur d'onde associée et préciser son domaine spectral.
5. On plonge cette molécule dans un champ électrique de norme $E = E_0\cos(\omega t)$
   Exprimer l'amplitude des oscillations de r autour de r_0.
   Tracer le graphe de cette amplitude en fonction de ω. Quel phénomène, en pratique, borne la résonance en $\omega = \omega_0$?