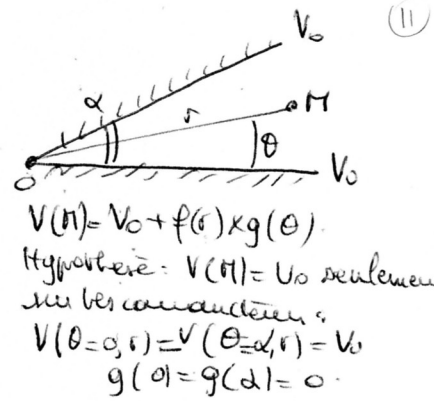


Laplace:  $\Delta V = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0$   
 $\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 V}{d\theta^2} = k^2 \text{ so}$

$\frac{d^2 V}{dr^2} + k^2 V = 0 \Rightarrow g(\theta) = G_1 \cos(k\theta) + G_2 \sin(k\theta)$   
 \*  $g(0) = 0 \Rightarrow G_1 = 0 \Rightarrow g(\theta) = G_2 \sin(k\theta)$   
 \*  $g(\alpha) = 0 \Rightarrow k\alpha = \pi \Rightarrow k = \frac{\pi}{\alpha}$



$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = k^2 r V$  avec  $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n r^{n-1}$   
 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n r^{n-1} = k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n^2 - k^2) r^{n-1} = 0$

$\Rightarrow n = \pm k \Rightarrow f(r) = a_1 r^k + \frac{b}{r^k}$  avec  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = 0$  car  $\lim_{r \rightarrow 0} V(r, \theta) = V_0$   
 $\Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(r) = a_1 r^k$

$\Rightarrow V(r, \theta) = V_0 + A r^k \sin(k\theta)$  où  $k = \frac{\pi}{\alpha}$  et  $A = C k$

I- Mines-Ponts (2024)

b- Exercice 2 : Conducteur diélectrique

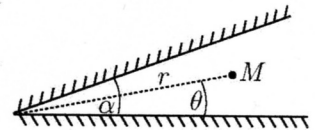
On considère deux conducteurs au potentiel  $V_0$ , qui forment un angle  $\alpha$  entre eux.

On repère le point en coordonnées polaires, comme indiqué sur la figure ci-contre.

Calculer la forme de  $V(M)$  ( $\theta \in [0, \alpha]$ ).

On le cherche sous la forme :

$V(M) = V_0 + f(r) \times g(\theta)$



Donnée : Laplacien en coordonnées polaires :

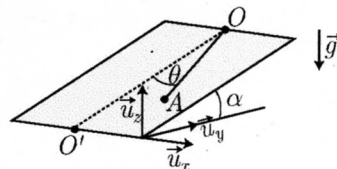
$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$

I- Mines-Ponts (2024)

29- Mécanique : pendule incliné (Levy, 2024)

On considère le pendule incliné suivant et on s'intéresse aux mouvements d'une masse  $m$  placée au bout d'un pendule de longueur  $l$ .

1. On considère d'abord qu'il n'y a pas de frottements.
  - a- Par une méthode énergétique, donner l'équation du mouvement.
  - b- Décrire le mouvement et donner la période dans le cas de petits mouvements.
2. On suppose maintenant qu'il y a un coefficient de frottement  $f$  (les coefficients de frottement statique et dynamique sont les mêmes).  
On suppose qu'on lâche la masse avec un angle  $\theta_1$  et qu'il arrive en  $\theta_2$ .



- a- Exprimer  $f$  en fonction de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\alpha$ .
- b- Déterminer une condition pour que  $\theta_2$  soit une position d'équilibre.
3. On considère maintenant un coefficient de frottement statique  $f_s$  et dynamique  $f_d$ . On suppose, de plus, que le plan est en rotation uniforme, à la vitesse angulaire  $\Omega$ , autour de l'axe normal au plan et passant par O.
  - a- On s'intéresse à la phase où la masse  $m$  est statique sur le plan. Déterminer le mouvement de  $m$ .
  - b- Déterminer la direction de la force tangentielle au moment où la phase statique cesse.

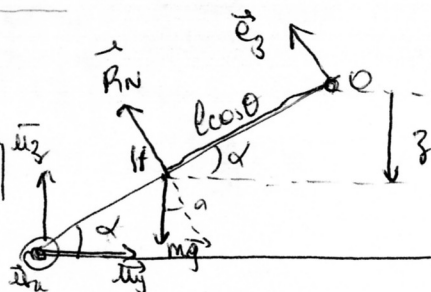
10) a-  $v = l\dot{\theta} \Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

$\mathcal{E}_p = m g z$  avec  $z = -l \cos \theta \sin \alpha \Rightarrow \mathcal{E}_p = -m g l \cos \theta \sin \alpha$

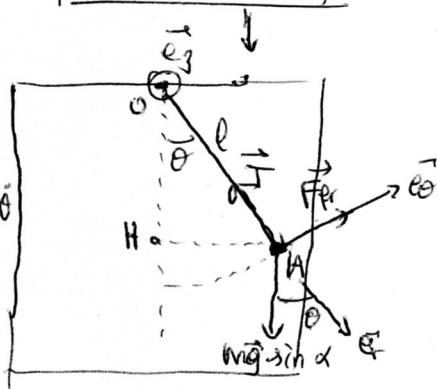
$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta \sin \alpha = Cte$

$\Rightarrow m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin \alpha \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g \sin \alpha}{l} \theta = 0$

b-  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{l}}$



Vue de dessus:



20) a- Pas de décollage  $\Rightarrow R_N = m g \cos \alpha$

Frottement:  $\vec{F}_f = -f R_N \vec{e}_\theta \Rightarrow \mathcal{P}_{frot} = \vec{F}_f \cdot \vec{v} = -f R_N l \dot{\theta} = -f m g \cos \alpha l \dot{\theta}$

$\Rightarrow \frac{dW_{fr}}{dt} = \mathcal{P}_{frot} = +f m g \cos \alpha l \frac{d\theta}{dt}$

$\Rightarrow W_{fr} = +f m g l \cos \alpha \Delta \theta$

$\Delta \mathcal{E}_m = W_{fr} \Rightarrow \left[ \frac{1}{2} m v_2^2 + \mathcal{E}_p(\theta_2) \right] - \left[ \frac{1}{2} m v_1^2 + \mathcal{E}_p(\theta_1) \right] = W_{fr}$  au  $\mathcal{E}_p = -m g l \cos \theta \sin \alpha$

$\Rightarrow -m g l \cos \theta_2 \sin \alpha + m g l \cos \theta_1 \sin \alpha = +m g l f \cos \alpha (\theta_2 - \theta_1)$

$\Rightarrow f = \frac{\sin \alpha \times (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{\theta_2 - \theta_1}$

b. Position d'équilibre si  $F_{fr} < \mu R_N = \mu mg \cos \alpha$

• Projection sur  $\vec{e}_\theta$  :  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow F_{fr} = mg \sin \alpha \sin \theta$

$$\Rightarrow \mu mg \sin \alpha \sin \theta_e < \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\sin \theta_e < \frac{\mu}{\tan \alpha}}$$

3°) • Force de frottement :  $F_{fr} = f_d \times R_N = f_d mg \cos \alpha$

• Force d'entraînement :  $\vec{F}_{ent} = m \omega^2 \vec{OA}$

• PFD :  $m [ (\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{\theta}\dot{\theta} + \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta ] = m \vec{g} \sin \alpha + \vec{F}_{ent} + \vec{F}_{fr} + \vec{T}$

Sur  $\vec{e}_\theta$  :  $\ddot{\theta} = -g \sin \alpha \sin \theta + f_d g \cos \alpha$

Equilibre :  $f_d \cos \alpha = \sin \alpha \sin \theta_e \Rightarrow \boxed{\sin \theta_e = \frac{f_d}{\tan \alpha}}$

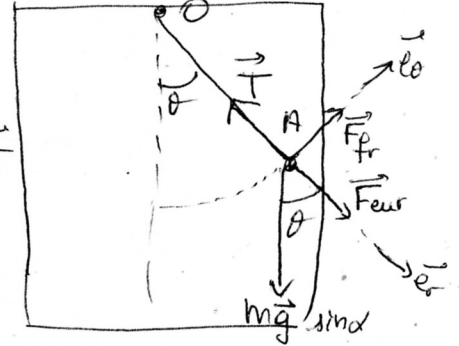
$$\Rightarrow \ddot{\theta} = f_d g \sin \alpha \sin \theta_e - g \sin \alpha \sin \theta = g \sin \alpha (\sin \theta_e - \sin \theta)$$

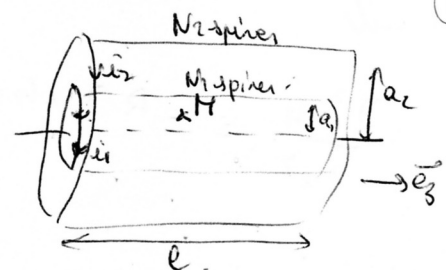
Oscillations au voisinage de  $\theta_e$  :  $\theta = \theta_e + \epsilon \Rightarrow \sin \theta \approx \sin \theta_e + \epsilon \cos \theta_e$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -g \sin \alpha \cos \theta_e \epsilon \Rightarrow \boxed{\ddot{\epsilon} + \frac{g \sin \alpha \cos \theta_e}{\ell} \epsilon = 0}$$

$$\Rightarrow \text{oscillation de pulsation } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha \cos \theta_e}{\ell}}}$$

Vue de dessus :

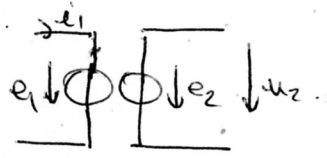




1°) Champs créés en 07 par  $B_1$  et  $B_2$ :  $\vec{B}_1(t) = \mu_0 n_1 i_1 \vec{e}_z$  et  $n_1 = N_1/l$   
 $\vec{B}_2(t) = \mu_0 n_2 i_2 \vec{e}_z$   $n_2 = N_2/l$

Flux à travers  $S_1$ :  $\Phi_1 = \Phi_{1/1} + \Phi_{2/1} = B_1 \times N_1 S_1 + B_2 \times N_1 S_1$   
 $= \mu_0 \frac{N_1^2}{l} i_1 \times N_1 \pi a_1^2 + \frac{\mu_0 N_2}{l} i_2 \times N_1 \pi a_1^2$   
 $\Rightarrow \Phi_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 \pi a_1^2}{l} i_1 + \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi a_1^2}{l} i_2 = L_1 i_1 + M i_2$

Flux à travers  $S_2$ :  $\Phi_2 = \Phi_{1/2} + \Phi_{2/2} = \frac{\mu_0 N_2^2 \pi a_2^2}{l} i_2 + \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi a_1^2}{l} i_1 = L_2 i_2 + M i_1$   
 $\Rightarrow M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi a_1^2}{l}$



2°)  $e_2 = - \frac{d\Phi_2}{dt} = - \cancel{l \frac{di_2}{dt}} - M \frac{di_1}{dt}$  car  $i_2 = 0$  (boucle ouverte)  
 $\Rightarrow e_2 = - \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi a_1^2}{l} \frac{di_1}{dt}$

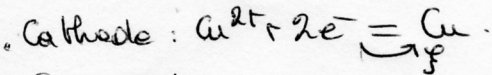
I- Mines-Ponts (2024)

30- Induction, chimie (Roy, 2024)

a- Exercice 1 : Inductances propre et mutuelle

1. On considère deux solénoïdes de rayons  $a_1$  et  $a_2 > a_1$ , l'un dans l'autre. Calculer  $M$ .
2. On fait passer un courant  $i_1$  dans le premier solénoïde. Déterminer la tensions aux bornes de la deuxième bobine, en boucle ouvert.

Exo 30 b P 18 - 2807252



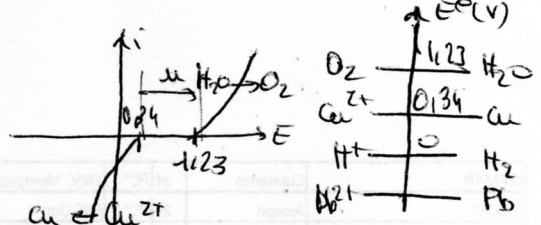
$\delta n e = 2 dS \Rightarrow \delta q = 2 F dS \Rightarrow i = 2 F \frac{dS}{dt} = j \times S$

$d m_{\text{Cu}} = M_{\text{Cu}} dS \Rightarrow j S = \frac{2 F}{M_{\text{Cu}}} \frac{d m_{\text{Cu}}}{dt} \Rightarrow \int dt = \frac{2 F}{M_{\text{Cu}} j S} \int d m_{\text{Cu}}$

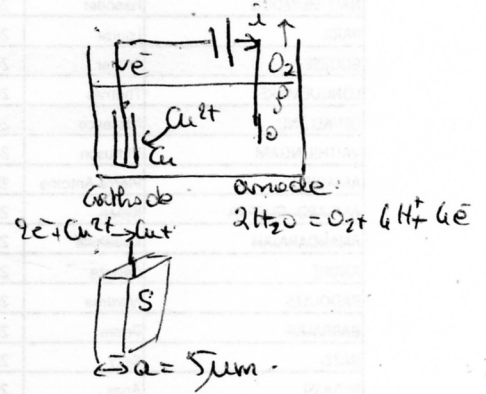
$\mu = \frac{m_{\text{Cu}}}{V} = \frac{m_{\text{Cu}}}{S a} \Rightarrow \Delta t = \frac{2 F}{M_{\text{Cu}} j S} \times S a \mu_{\text{Cu}}$

$\Rightarrow \Delta t = \frac{2 F \mu_{\text{Cu}} a}{M_{\text{Cu}} \times j} = \frac{2 \times 96500 \times 8900 \times 5 \cdot 10^{-6}}{63.5 \cdot 10^{-3} \times 10^4}$

$\Rightarrow \Delta t = 13,5 \text{ s}$



$\text{O}_2$	1,23	$\text{H}_2\text{O}$
$\text{Cu}^{2+}$	0,34	$\text{Cu}$
$\text{H}^+$	0	$\text{H}_2$
$\text{Pb}^{2+}$		$\text{Pb}$



Énergie:  $\mu \geq 1,23 - 0,34 = \mu_0 \Rightarrow \mu_0 = 0,96 \text{ V}$

$\mathcal{E} = \mu \times a \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{S} = \mu_0 \times j S \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{S} = \mu_0 \times j \Delta t = 0,96 \times 10^4 \times 13,5$   
 $\Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{S} \approx 130 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2}$

I- Mines-Ponts (2024)

b- Exercice 2 : Corrosion

On possède une solution de  $(\text{Cu}^{2+}, \text{SO}_4^{2-})$  et une électrode de plomb. On veut créer une barrière de  $5 \mu\text{m}$  de cuivre autour de l'électrode de plomb. On mesure l'intensité et le potentiel à l'aide d'une contre-électrode. On remarque un dégagement de dioxygène à la contre-électrode. On mesure  $j = 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ . Trouver les caractéristiques de l'électrolyse et l'énergie.

Données :

- Potentiels standard de différents couples :

$E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$      $E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0,00 \text{ V}$      $E^0(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = 0,34 \text{ V}$      $E^0(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb}) = -0,13 \text{ V}$

- Masse molaire du cuivre :  $M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Masse volumique du cuivre :  $\mu = 8900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$