C2– Mécanique

⋆⋆⋆ **Exercice N°1–**

On étudie la chute d'une goutte d'eau et on néglige la résistance de l'air. La goutte d'eau se déplace dans une atmosphère saturée en eau, possédant n gouttelettes d'eau par unité de volume. Ces gouttelettes sont supposées immobiles et de volume V_0. On pose $\alpha = nV_0$. On néglige la poussée d'Archimède.

1. Par un bilan approprié, relier la dérivée du rayon de la goutte $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ à la vitesse de la goutte $v = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.
2. Par un bilan de quantité de mouvement, relier $v(t)$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $r(t)$, α et g.
3. En supposant l'accélération γ de la goutte constante, exprimer γ en fonction de g.
4. On donne $V_0 = 10^{-29}$ m^3 et la formule de Duperray donnant la pression de vapeur saturante de l'eau, en bar, en fonction de la température exprimée en degré Celsius : $P_s = \left(\frac{\theta}{100}\right)^4$. Calculer la valeur de n puis de α pour $\theta = 20$°C.
5. On suppose que $r_{(t=0)} \simeq 0$ et $v_{(t=0)} \simeq 0$. Au bout de combien de temps le rayon de la goutte atteint-il 1 mm ?

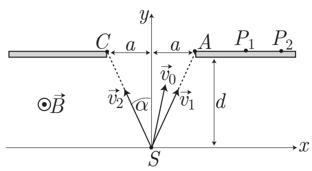
⋆ **Exercice N°2–**

Un pendule pesant est constitué d'un fil vertical inextensible, de longueur ℓ, de masse négligeable, dont une extrémité O est attachée à un support fixe. À l'autre extrémité est accroché un point matériel M, de masse m, soumis à la pesanteur d'intensité g. Initialement, le fil est écarté de la verticale d'un angle θ_0, avec une vitesse nulle.

1. Écrire l'équation différentielle satisfaite par l'angle θ que fait le fil par rapport à la verticale. La résoudre et donner l'expression de $\theta(t)$, dans l'approximation des petits angles.
2. Dans le cadre de ces approximations, déterminer l'expression de la tension T du fil, en fonction de m, g, ℓ, θ_0^2 et θ^2.
   Lorsque le fil repasse par la vertical, montrer que $T \geqslant mg$.

⋆⋆ **Exercice N°3–**

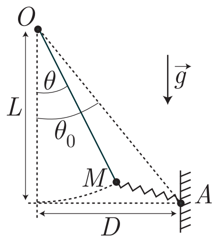
Soit une source filiforme S, parallèle au champ magnétique $\vec{B}$, uniforme et constant, régnant dans tout l'espace. Cette source émet des particules identiques de masse m et de charge q positive. Les vitesses initiales sont perpendiculaires à $\vec{B}$ et sont de même norme v_0.



La fente source S est parallèle à la grande médiane d'une ouverture rectangulaire de largeur $2a$, équidistante de ses bords et située à une distance d de son plan. On désigne par 2α l'ouverture du pinceau utile. On admettra que chaque particule décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = \frac{mv_0}{qB}$ et que les particules passant par A (*resp.* C) possèdent la vitesse $\vec{v}_1$ (*resp.* $\vec{v}_2$).

1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire d'une particule quittant S avec un vecteur vitesse $\vec{v}_i$ faisant un angle θ_i $(-\alpha \leqslant \theta_i \leqslant \alpha)$ avec l'axe Oy. On admettra que d est assez petit pour que toutes les particules passent à travers l'ouverture.
2. En déduire, en fonction de d, α et R, la distance P_1P_2 séparant les deux droites parallèles à S, entre lesquelles se trouvent les intersections, dans le plan de l'ouverture rectangulaire, des trajectoires de toutes les particules.

⋆⋆⋆ Exercice N°4–



Un pendule pesant est constitué d'un point M, de masse m, suspendu par une tige rigide de longueur L et de masse négligeable, dont l'autre extrémité peut tourner sans frottements autour d'un point immobile O. Le point M est également soumis à l'action d'un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. Lorsque la tige est verticale, le triangle OMA est un triangle rectangle tel que $(MOA) = \theta_0$.
Le dispositif est plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ vertical descendant.

1. Lorsque la tige fait un angle θ avec la verticale, exprimer les moments du poids de M et de la tension $\vec{T}$ du ressort (en fonction de k, L, D, θ).
2. Trouver l'expression de l'angle θ_e d'équilibre de M, en fonction de k, D, m, g et L.
3. La tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle $\varepsilon = \theta - \theta_e \ll \theta_e$. Déterminer l'expression de la pulsation des oscillations qui prennent naissance.

Réponses

Exercice N°1–

1. $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\alpha}{4}\,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$
2. $\dfrac{3}{4}\,r^2\alpha v^2 + r^3\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r^3 g$
3. $\gamma = g - 3\alpha\,\dfrac{v^2}{4r} \Rightarrow \gamma = g/7$
4. $n = 3,96.10^{22}\ \mathrm{m}^{-3}$ et $\alpha = 4.10^{-7}$
5. $t \simeq 2$ min

Exercice N°2–

1. $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\,\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0\,\cos(\omega_0 t)$
2. $T = mg\,\cos\theta + mg\,(\theta_0^2 - \theta^2)$

Exercice N°3–

1. $y = -R\,\sin\theta_i \pm \sqrt{R^2 - (x - R\,\cos\theta_i)^2}$
2. $d = \sqrt{R^2 - (d - R\,\sin\alpha)^2} - \sqrt{R^2 - (d + R\,\sin\alpha)^2}$

Exercice N°4–

1. $\vec{\mathcal{M}}_P = -mg\,\sin\theta\,\vec{e}_z$ et $\vec{\mathcal{M}}_T = (klD\,\cos\theta - kL^2\,\sin\theta)\,\vec{e}_z$
2. $\tan\theta_e = \dfrac{kD}{kL + mg}$
3. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{kL + mg}{mL\,\cos\theta_e}}$