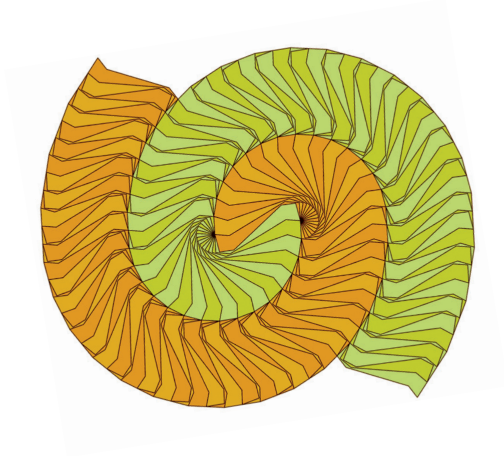
LOGIQUE & CALCUL

# Le défi de la sixième couronne

*Une figure plane peut-elle paver une grande surface sans qu'il lui soit possible de paver le plan tout entier ? Ce problème dit de Heesch est posé depuis 1968.*

**Jean-Paul DELAHAYE**



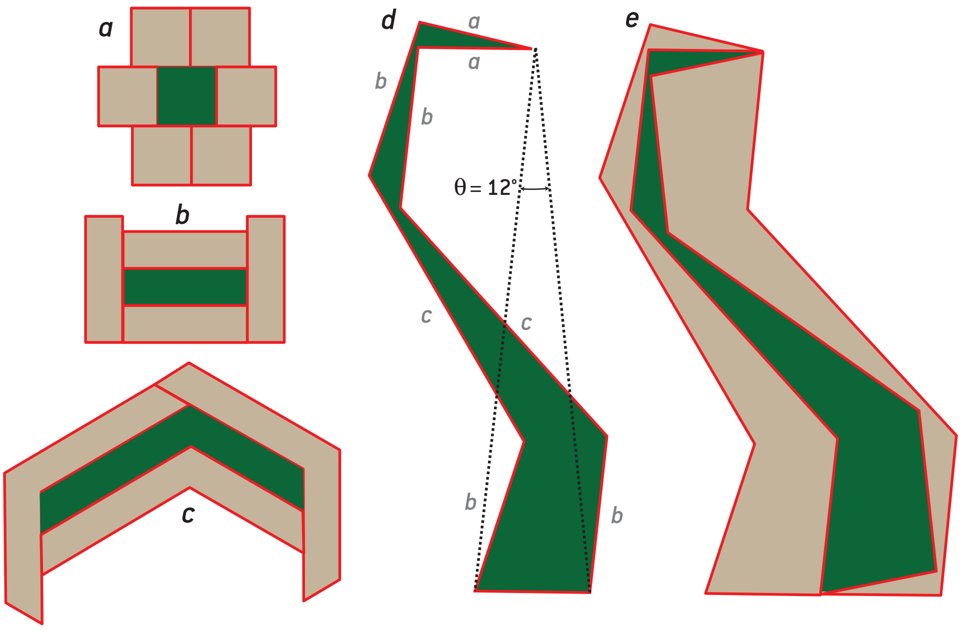
Les mathématiciens s'intéressent aux pavages du plan par des formes géométriques aussi simples que possible. Ils les classent en considérant leur symétrie, conçoivent des algorithmes qui en découvrent de nouveaux, étudient les formes n'autorisant que des motifs apériodiques, etc. À côté de ces problèmes classiques, certains traitent non pas de ce qui se passe sur le plan entier, mais ce qui se passe localement autour d'un point ou d'un pavé : ce sont les problèmes d'entourages. Nous en présenterons deux. Le premier est aujourd'hui résolu. Le second, malgré des progrès réguliers, reste mystérieux.

Commençons par une énigme élémentaire en apparence. On se donne une forme plane, un pavé P. Pouvons-nous l'entourer totalement d'une couronne composée de copies de P, en ne laissant aucun espace libre entre les différents pavés utilisés ? Quel est le nombre minimal de copies de P nécessaire à un tel entourage ?

Un pavé carré s'entoure sans mal de six carrés identiques *(ci-dessous, a)*, et c'est le minimum ; mieux, tout rectangle (non carré !) s'entoure de quatre copies de lui-même *(b)* ; mieux encore, certains pavés s'entourent avec seulement trois copies d'eux-mêmes *(c)*.

Évitons tout malentendu sur le mot couronne. La couronne qui entoure un pavé P doit avoir une certaine épaisseur non nulle *e* : la distance minimum entre un point extérieur aux pavés et un point du pavé central P doit toujours être supérieure à *e*. Des pavés autour d'un pavé P (ou d'un ensemble E de pavés) sont considérés comme une couronne pour P (ou pour E) si la suppression d'un seul pavé de la couronne met en contact l'extérieur de la zone pavée avec le pavé central (ou avec E).

**PEUT-ON ENTOURER PARFAITEMENT** un pavé avec des copies de lui-même ? Le dessin *a* montre un pavé carré entouré par une couronne de six carrés ; pour un rectangle, quatre copies suffisent *(b)*. Certains pavés sont entourés en n'utilisant que trois exemplaires d'eux-mêmes *(c)*. Peut-on trouver un pavé dont deux copies suffisent à lui composer une couronne d'épaisseur non nulle ? Le problème a été résolu par Casey Mann, qui a utilisé une famille de pavés découverts en 1936 par Heinz Voderberg. Le polygone à neuf côtés de Voderberg *(d)* pave le plan de manière périodique, mais aussi en formant une spirale *(ci-dessus, à côté du titre)*. Deux copies du pavé de Voderberg peuvent l'entourer *(e)*, et même entourer deux exemplaires collés du pavé *(f)*. Cependant, la couronne ainsi formée est infiniment mince en deux points, ce qui n'est pas satisfaisant. Casey Mann a corrigé ce défaut en modifiant la forme du pavé de Voderberg (*g*, *h* et *i*).




 © Pour la Science - n° 451 - Mai 2015

Pour savoir s'il est possible d'entourer un pavé P par une couronne de deux pavés P, prenez un papier et un crayon et essayez ! *(Voir la figure ci-dessous si vous n'y parvenez pas.)*

## Le pentagone de Heesch : une seule couronne

Le second problème d'entourage qui va nous occuper a pour origine un petit ouvrage allemand publié en 1968, où le mathématicien Heinrich Heesch (1906-1995) formulait une remarque inattendue. Il présentait un pentagone dont les angles sont 90°, 150°, 90°, 150° et 60° et ayant l'étrange propriété suivante : une copie du pentagone de Heesch s'entoure parfaitement, sans chevauchement ni espace laissé vide, par six, sept ou huit copies de lui-même formant une couronne, et pourtant il est impossible de réaliser une seconde couronne autour de la première. On vérifie sans mal que les exemples *a*, *b* et *c* de la figure ci-dessous n'ont pas cette propriété : dans chaque cas, il est possible de construire une seconde couronne autour de la première, et même une troisième, ainsi de suite.

Le pentagone de Heesch réussit donc à paver parfaitement une certaine aire du plan, mais celle-ci est limitée et il est impossible de prolonger le pavage partiel pour rendre l'entourage plus épais *(voir la figure page 80)*.

Prouver qu'on ne peut pas faire de deuxième couronne exige un raisonnement rigoureux où il faut énumérer soigneusement un grand nombre de cas. Pour se convaincre du résultat, le plus simple est de découper des pavés en carton et d'essayer ; au bout de quelques minutes, vous n'aurez plus aucun doute sur l'impossibilité d'une seconde couronne ! Bien sûr, aujourd'hui, on s'aidera aussi de programmes informatiques qui feront systématiquement les essais de construction et garantiront l'impossibilité d'une nouvelle couronne sans trop de fatigue… pour le mathématicien.

En réalité, le pavé de Heesch n'était pas le premier. On s'est en effet aperçu qu'un pavé proposé en 1928 par le mathématicien allemand Walther Lietzmann, qui a la forme d'une goutte d'eau, a la même propriété. On peut l'entourer avec six copies, mais la couronne ainsi faite est impossible à entourer une seconde fois *(figure page 80, b)*.

On s'est alors demandé si l'on pouvait faire mieux : trouver des pavés admettant non plus une couronne, mais deux, voire plus, sans pour autant que le pavage du plan entier soit possible.

Cela conduit à la définition suivante : le nombre de Heesch d'un pavé P est égal à $n$ si P s'entoure parfaitement de $n$ couronnes d'épaisseur non nulle et faites de copies de P, mais ne peut pas l'être par $(n+1)$ couronnes.

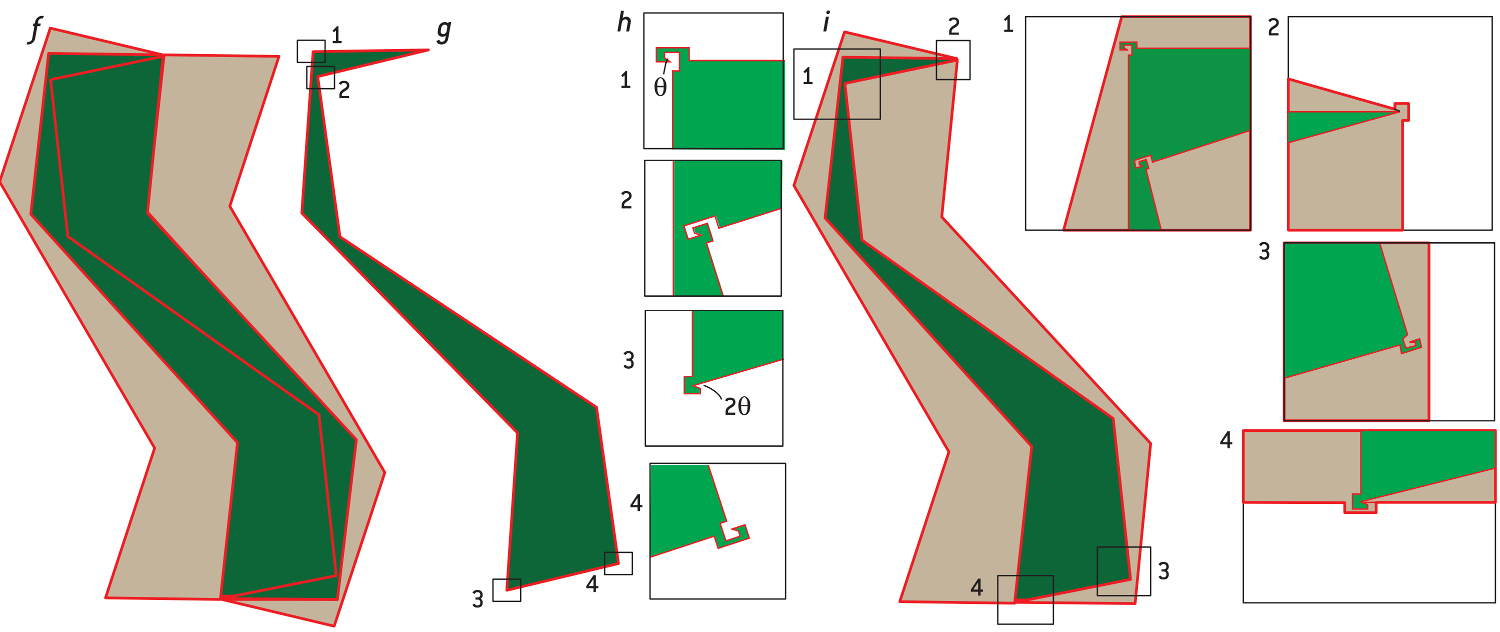
Si aucune couronne n'est faisable, le nombre de Heesch est 0. Lorsqu'un pavé P peut être entouré de $n$ couronnes pour tout $n$, le nombre de Heesch de P est infini.

Plus le nombre de Heesch est grand, plus la surface pavable par le pavé est grande. Le problème est l'étude des formes qui réussissent à paver de grandes surfaces sans paver tout le plan.

## Pavés dont le nombre de Heesch vaut 1

Les figures ayant un nombre de Heesch égal à 1 sont toutes intéressantes, et en trouver demande astuce et imagination. Le Japonais Yoshio Agaoka a découvert en 2005 une forme régulière symétrique ayant un nombre de Heesch égal à 1. C'est le polygone convexe à sept côtés, un heptagone, dont les angles sont 60°, 160°, 160°, 100°, 100°, 160° et 160° *(figure page 80, c)*.

On démontre qu'un heptagone convexe ne peut pas paver le plan tout entier. L'heptagone de Agaoka, notons-le HA, a donc un



## Une couronne, mais pas deux

Voici des exemples de pavés *(en vert)* ayant un nombre de Heesch égal à 1, c'est-à-dire des pavés que l'on peut entourer d'une couronne composée de copies du pavé et d'épaisseur non nulle, mais que l'on ne peut pas entourer d'une seconde couronne.

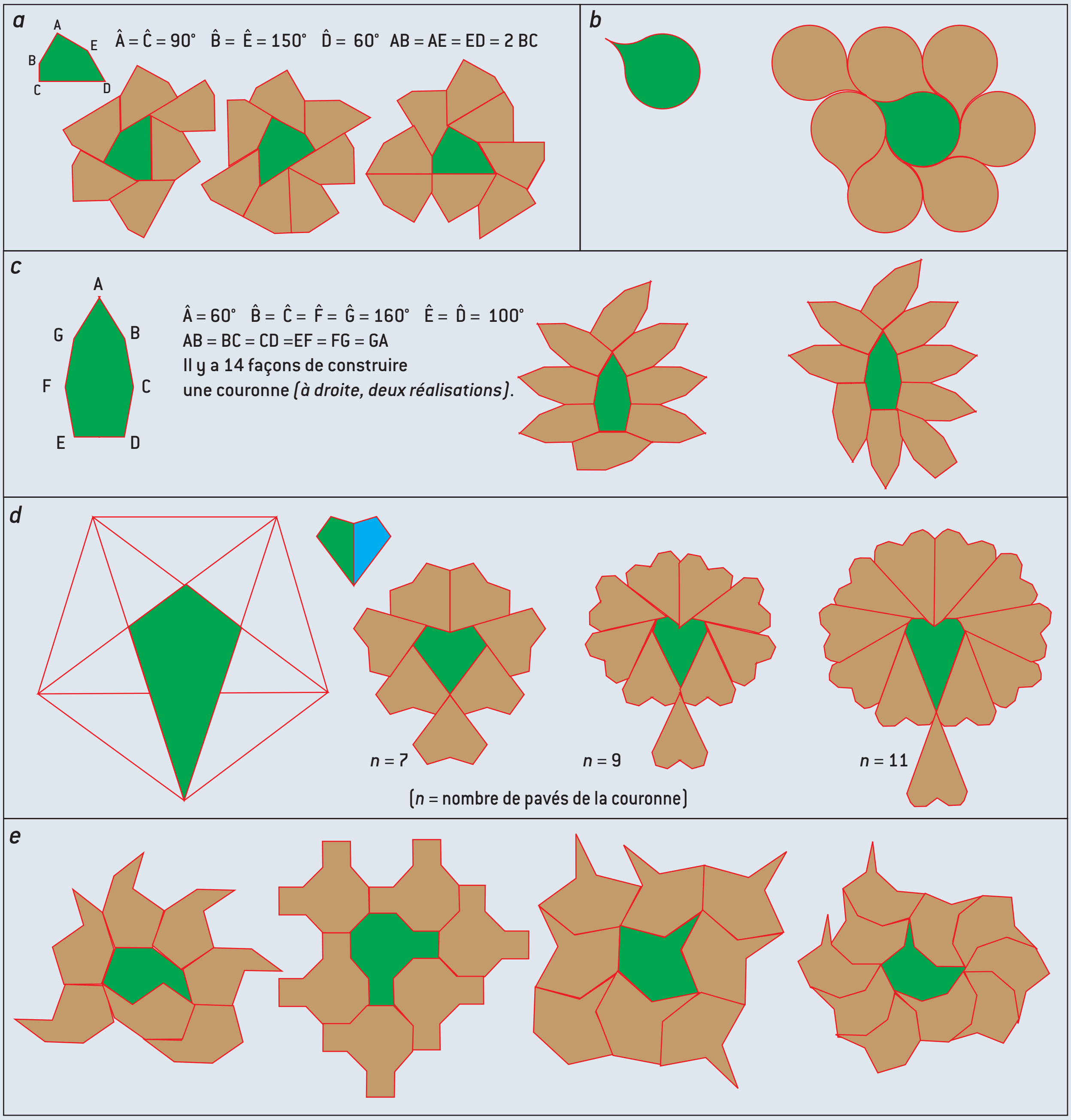
*(a)* Le pavé découvert en 1968 par Heinrich Heesch et trois façons de constituer une couronne.

*(b)* La goutte d'eau de l'Allemand Walther Lietzmann (1928).

*(c)* Le bel heptagone de Yoshio Agaoka (2005).

*(d)* La méthode générale de Peter Raedschelders (1998) pour construire une famille infinie de pavés à nombre de Heesch égal à 1.

*(e)* Divers pavés ayant un nombre de Heesch égal à 1 construits par Mark Thompson à partir de polygones réguliers.






© Pour la Science - n° 451 - Mai 2015

nombre de Heesch fini. Une recherche systématique montre qu'il existe 14 façons différentes de faire une couronne autour de HA *(voir la figure c page ci-contre pour deux exemples ; trouver les 12 autres est un amusant casse-tête)*. Ces diverses couronnes montrent que le nombre de Heesch de HA est au moins 1. Un peu de patience permet de s'assurer qu'aucune de ces 14 couronnes ne s'entoure d'une autre couronne ; par conséquent, le nombre de Heesch de HA est exactement 1.

Peter Raedschelders, en Belgique, a découvert une famille infinie de pavés dont le nombre de Heesch est 1. On part d'une étoile régulière à $k$ branches, avec $k$ impair. Cela détermine une forme qui, accolée à elle-même, constitue le pavé cherché *(figure d)*. L'intérêt de cette construction est que le nombre de pavés nécessaire pour construire la couronne est $k + 2$. Il s'ensuit que pour tout $k$, on connaît un pavé dont des copies s'assemblent pour couvrir une surface, presque ronde et sans trou, d'aire $(k + 3)$ fois supérieure à l'aire du pavé utilisé, mais qui ne peut pas paver le plan infini. La possibilité de paver un disque d'aire très grande par rapport à l'aire du pavé initial ne garantit donc jamais qu'il soit possible de paver le plan.

## Des pavés au nombre de Heesch égal à 2 ou 3

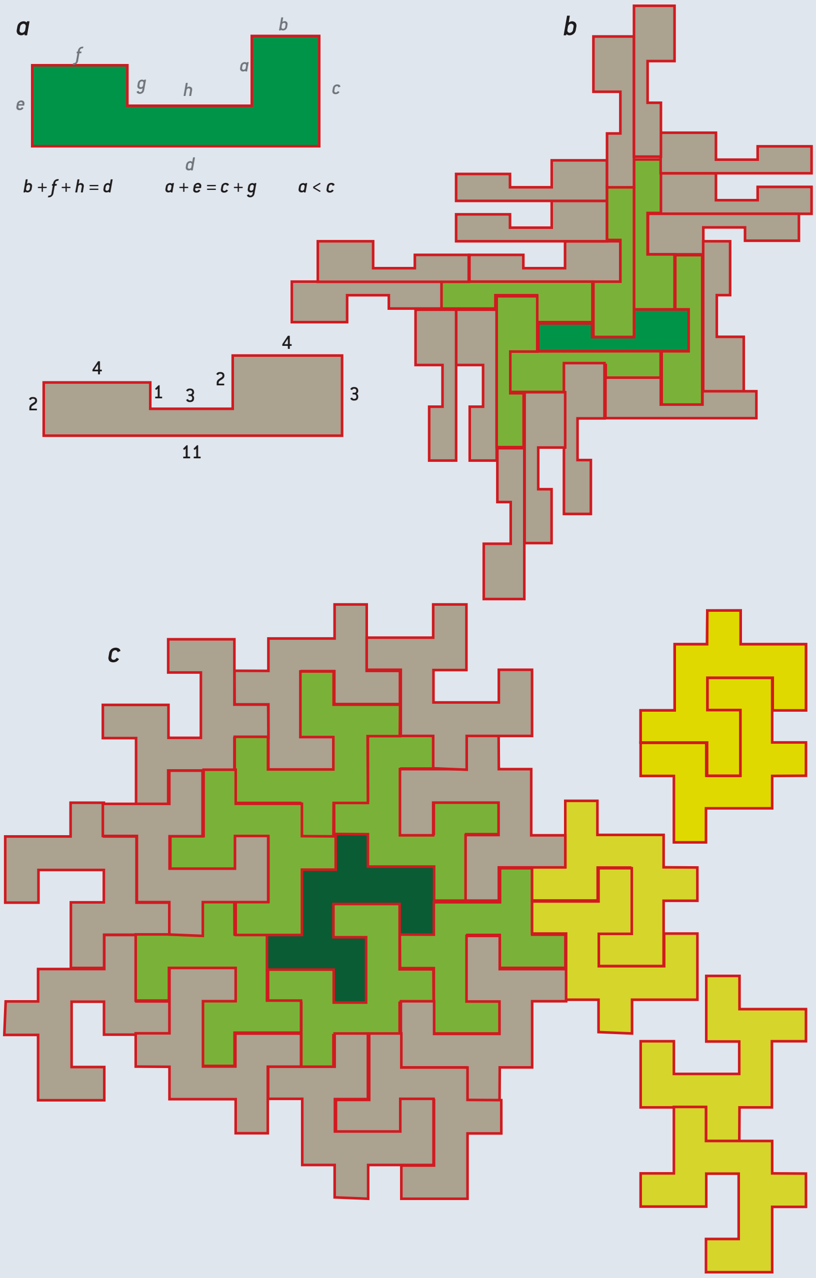
Il a fallu attendre 1991 pour que les premiers pavés à nombre de Heesch supérieur à 1 soient identifiés. Anne Fontaine, de l'Université de l'État de New York à Albany, proposa une famille entière de tels pavés. Une sorte de U s'entoure de deux couronnes, bien qu'il soit impossible d'en faire une troisième *(voir l'encadré ci-contre, a et b)*.

En 2003, Glenn Rhoads, pour son travail de doctorat mené à l'Université du New Jersey, a étudié les pavés obtenus en accolant des carrés par leurs côtés, qu'on dénomme polyominos. Ils ont été testés un à un jusqu'à en trouver d'intéressants. Le programme écrit par Glenn Rhoads a ainsi pu déterminer le plus petit polyomino dont le nombre de Heesch est 2 *(ci-contre, c)*. Ce polyomino optimal est composé de

### Deux couronnes, mais pas trois

Les premiers pavés ayant 2 pour nombre de Heesch sont dus à Anne Fontaine. La forme générale, représentée en *a*, engendre une famille infinie de pavés. Un exemple de pavage partiel réalisant deux couronnes (mais pas trois) est dessiné en *b*.

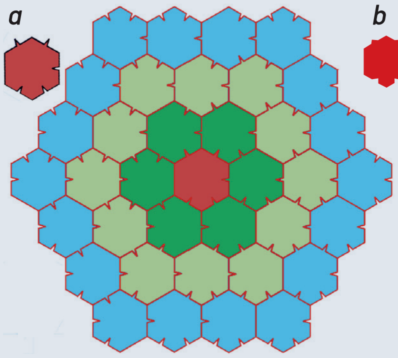
Le dessin *c* montre le plus petit polyomino ayant un nombre de Heesch égal à 2 et les trois façons de disposer les deux couronnes : elles ne diffèrent que par la position de deux pavés *(en jaune)*. Ce pavé a été trouvé à l'aide d'un programme écrit par Glenn Rhoads.



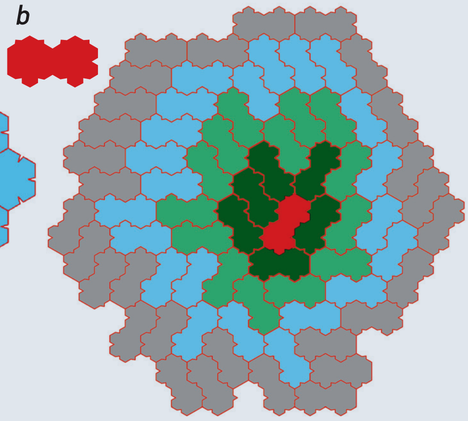
## Le record actuel : cinq couronnes

L'Américain Robert Ammann a découvert en 1991 le premier pavé ayant un nombre de Heesch égal à 3 *(a)*. Casey Mann, dans le cadre de sa thèse de doctorat soutenue en 2001 à l'Université de l'Arkansas, a fait mieux en construisant un pavé *(b)* à quatre couronnes (nombre de Heesch égal à 4). Enfin, le record mondial est jusqu'ici détenu par un pavé également découvert par Casey Mann *(c)*. Son nombre de Heesch est égal à 5. Ce pavé est extensible (on peut l'allonger autant que l'on souhaite) et a toujours un nombre de Heesch égal à 5, pourvu qu'il soit composé d'au moins quatre hexagones de base.

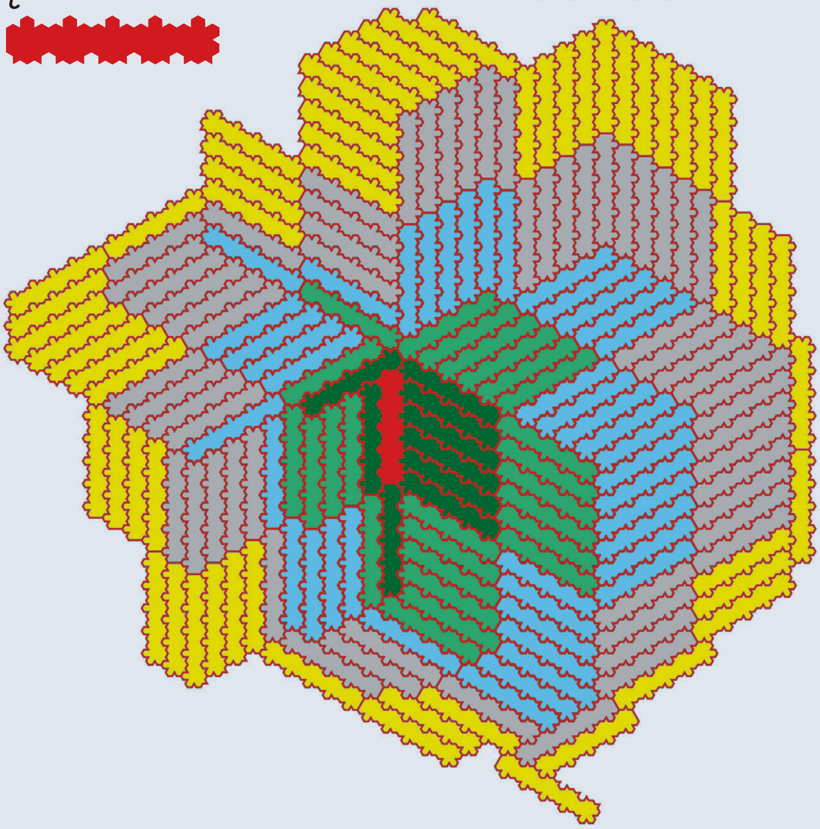
*a*



*b*



*c*



11 carrés et il n'y a que trois façons de faire les deux couronnes. Elles ne diffèrent que par la position de deux pavés.

L'année où Anne Fontaine trouvait sa famille infinie de pavés ayant un nombre de Heesch égal à 2, l'Américain Robert Ammann, un amateur de divertissements mathématiques auteur de plusieurs trouvailles notables concernant les pavages du plan, découvrit un pavé dont le nombre de Heesch est égal à 3. Il s'agit d'un hexagone creusé sur deux côtés et muni d'une petite bosse sur trois autres côtés. Les creux, par exemple triangulaires, s'ajustent parfaitement aux bosses *(voir l'encadré ci-contre, a)*. C'est en généralisant ce type de constructions qu'on a su dépasser le record de 3.

Lors de sa thèse soutenue à l'Université de l'Arkansas en 2001, Casey Mann, aujourd'hui en poste à l'Université de Washington, a entrepris l'étude systématique des trous et des bosses dans des formes pavant le plan à la recherche de pavés dont le nombre de Heesch dépasse 3. Il s'est intéressé à trois types de formes : celles composées de carrés accolés par leurs côtés (les polyominos), celles composées d'hexagones accolés et celles composées de triangles équilatéraux accolés. En ajoutant des bosses et des creux complémentaires entre eux sur certains côtés de ces formes, on obtient des pavés, que Casey Mann dénomme poly-formes, dont le nombre de Heesch dépasse souvent 2.

## Indécidabilité

Le résultat qui justifie la méthode et fait croire en son potentiel est le suivant : si P est une poly-forme dont $n$ côtés sont munis d'une bosse et $m$ côtés comportent un creux complémentaire de la bosse, et si $m$ et $n$ sont différents, alors le nombre de Heesch de P est fini (P ne pave pas le plan).

Ce résultat fournit un procédé d'énumération de pavés candidats qui ne pavent pas le plan et qui sont donc susceptibles de battre le record de Ammann. Notons d'ailleurs que le pavé de Ammann est une poly-forme : un hexagone où $m = 3$ et $n = 2$.

Le cas particulier obtenu en accolant $k$ hexagones en ligne et en les munissant

 © Pour la Science - n° 451 - Mai 2015

de $2k$ bosses et de $(2k+1)$ creux (une telle forme se dénomme $k$-hexapilier) a permis de battre le record de Robert Ammann : Casey Mann a prouvé que le nombre de Heesch des 2 et 3-hexapiliers est 4 et que le nombre de Heesch des $k$-hexapiliers où $k > 3$ est égal à 5 *(voir l'encadré page ci-contre, c)*.

Casey Mann poursuit son étude systématique en cherchant à dénombrer les poly-formes en fonction de leur nombre de Heesch. Le projet est difficile car, même pour un petit nombre de côtés, les combinaisons possibles pour placer les creux et les bosses sont extrêmement nombreuses. Des milliers d'heures de calculs ont déjà été utilisées pour les décomptes.

## Pour tout nombre de Heesch, des pavés ?

Pour l'instant, le record de 5 n'a pas été battu, mais selon Casey Mann, cela sera probablement le cas. Il pense en effet que, pour tout $n$, on trouvera des pavés ayant un nombre de Heesch supérieur à $n$. Cette conjecture affirmant l'existence de pavés dotés d'un nombre de Heesch aussi grand qu'on le veut est parmi les plus difficiles de la géométrie des pavages. Elle est liée à un autre problème important de la théorie des pavages, lui aussi non résolu.

Ce problème consiste à se demander si un pavé donné (qu'on prendra polygonal pour simplifier) pave le plan, et à rechercher un algorithme qui, à chaque fois qu'on lui soumettrait un tel pavé, calculerait (sans se tromper, bien sûr) la réponse, *oui* ou *non*. Dans le cas de plusieurs pavés (on se donne une famille finie de pavés polygonaux et on cherche à déterminer s'ils pavent le plan) la réponse est connue : il n'existe aucun algorithme réalisant ce travail. Cette « indécidabilité du problème du pavage » pour plusieurs pavés a été démontrée en 1966 par l'Américain Robert Berger.

Pour un seul pavé, la réponse est inconnue : on ignore s'il existe un algorithme infaillible indiquant si un pavé polygonal pave ou non le plan.

Cependant, on montre que si le problème du pavage pour un pavé polygonal est indécidable, alors il n'existera pas de borne finie pour le nombre de Heesch. Résoudre la conjecture concernant la décidabilité algorithmique du pavage par un polygone résoudrait donc la conjecture concernant le nombre de Heesch.

De nombreuses variantes du problème de Heesch ont été étudiées et parfois entièrement résolues.

Sur la sphère, peu de résultats sont connus. Le plus avancé est donné par un pavé, un triangle équilatéral d'angle 75°, dont le nombre de Heesch est 3. Dans les espaces euclidiens de dimension 3 ou plus, on sait limiter le nombre de Heesch (on place des bosses et des creux), mais pour l'instant, on n'a pas trouvé de formes ayant un nombre de Heesch supérieur à 5.

Si, au lieu de se placer sur le plan euclidien, on se place sur le plan hyperbolique, Alexey Tarasov de l'Académie des sciences de Russie a prouvé en 2010 que le nombre de Heesch d'un pavé peut être fini et aussi grand qu'on le veut. Il est assez étrange que le problème de Heesch soit plus facile sur le plan hyperbolique que sur le plan euclidien !

Pourquoi certains problèmes à l'énoncé simple, que tout le monde comprend, sont-ils aussi ardus ? Pourquoi nos puissantes machines explorant des millions de combinaisons par seconde échouent-elles à nous éclairer plus rapidement ? C'est l'un des mystères les plus profonds des mathématiques ; mais c'est aussi ce qui fait leur intérêt et leur charme : à chaque pas, même quand on se croit en terrain conquis, un obstacle inopiné surgit devant nous, exigeant des jours, des mois, des années ou des siècles de travail. ■

### L'AUTEUR

**J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).**

### BIBLIOGRAPHIE

C. Mann et B. Thomas, **Heesch number of edge-marked polyform**, à paraître, 2015.

A. Akhmedov, **Cayley graphs with an infinite Heesch number**, prépublication arXiv:1412.0358, 2014.

A. Tarasov, **On the Heesch number for the hyperbolic plane**, *Mathematical Notes*, vol. 88(1-2), pp. 97-102, 2010.

C. Mann, **Heesch's tiling problem**, *American Mathematical Monthly*, vol. 111(6), pp. 509-517, 2004.

**Références supplémentaires sur le site www.pourlascience.fr**

Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

### DES NOUVELLES DES GRAPHES-ALLUMETTES

L'article sur les graphes-allumettes (*Pour la Science*, novembre 2014) a inspiré un lecteur qui a étendu le catalogue connu de ces graphes particuliers et délicats à classer. Le résultat du colossal travail d'Alexis Vaisse se trouve sur :

http://alexis.vaisse.monsite-orange.fr/page-54b81c6bc01a2.html

Dans les dénombrements qu'il a réalisés, Alexis Vaisse trouve 2008 graphes-allumettes à 10 arcs, qui s'organisent en 33 catégories. Pour ceux qui souhaiteraient vérifier le travail, le prolonger ou l'utiliser, diverses données et programmes concernant ces graphes sont disponibles sur la page web indiquée. Alexis Vaisse a entrepris de poursuivre le catalogue en traitant les graphes-allumettes à 11, 12 ou 13 arcs.