DM - Le lièvre et la tortue

I. Aspects mathématiques

On fixe un entier $n \in \mathbf{N}$ et on considère une fonction $f : E_n \to E_n$ où l'on a posé $E_n = [\![0, n-1]\!]$.

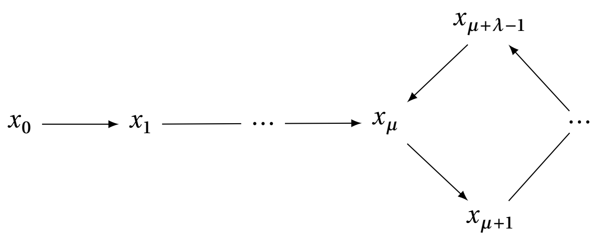
On pose enfin un entier $a \in E_n$ et on considère la suite récurrente (u_n) définie par :

$$u_0 = a \qquad \forall \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

Question 1 Montrer qu'il existe des entiers μ et $\lambda \geq 1$ tels que :

$$\forall\, k \in \mathbf{N},\ k \geq \mu \implies u_{k+\lambda} = u_k$$

et que les $x_0, x_1, \dots, x_{\mu+\lambda-1}$ sont tous distincts. Graphiquement, cela peut se représenter ainsi :



Nous allons étudier un algorithme qui permet de déterminer efficacement les valeurs de λ et de μ, ainsi qu'une application.

Question 2 Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $x_{2n} = x_n$ et que l'on a alors

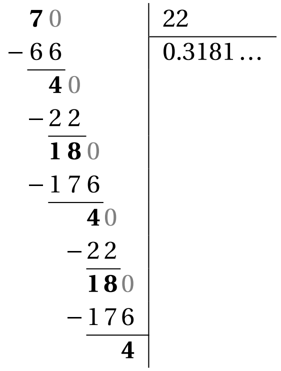
$$\mu = \min\{k \in \mathbf{N} \mid x_{n+k} = x_k\}$$

Ce résultat nous fournit un algorithme pour déterminer la valeur μ. Il est alors facile de déterminer λ. Il est attribué à Robert Floyd et est parfois appelé *algorithme du lièvre et de la tortue*.

Question 3 Écrire une fonction `floyd : ('a -> 'a) -> 'a -> int * int` telle qu'étant donnés `f` est une fonction sur un ensemble fini E et `a` un élément de E, « `floyd f a` » retourne le couple d'entiers (μ, λ) défini précédemment.

II. Écriture développée des rationnels

Nous allons maintenant nous pencher sur l'écriture décimale d'un rationnel a/d avec $0 \leq a < d$. Voici par exemple le début du calcul de la division de $7/22$:



À chaque étape de calcul, on procède ainsi : on ajoute un 0 au dividende (cela correspond à multiplier par 10, étant en base 10), le quotient de la division euclidienne donne la décimale suivante du résultat alors que le reste est le nouveau dividende.

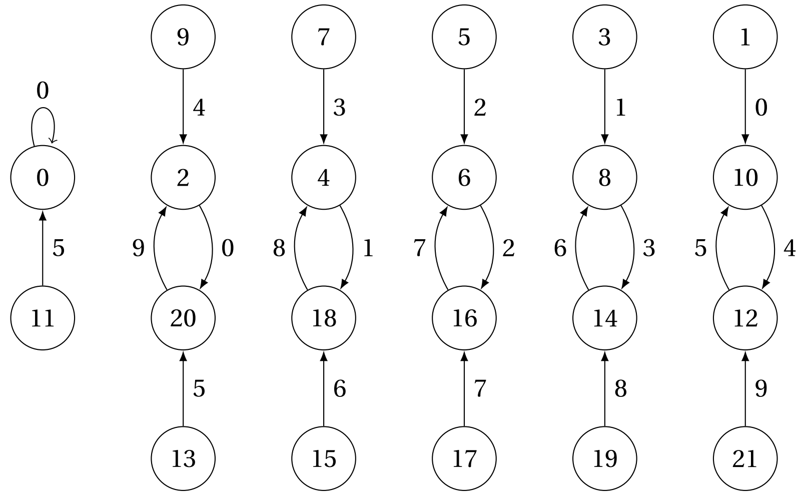
On voit clairement que l'on va continuer à obtenir une alternance de 1 et de 8, correspondant à l'alternance de dividendes 4 et 18.

Définition Le **graphe de division** pour d en base b s'obtient en considérant tous les entiers de 0 à $d-1$ que l'on relie de la façon suivante : pour tout $a \in [\![0, d-1]\!]$, en notant q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de ba par d, alors on ajoute une flèche de a à r étiquetée par q.

Exemple Dans le graphe de division pour 22 en base 10, puisque

$$10 \times \mathbf{7} = 70 = \mathbf{3} \times 22 + \mathbf{4},$$

on a une flèche de 7 vers 4 étiquetée par 3. Le graphe de division pour 22 en base 10 est le suivant :



Pour déterminer le développement en base 10 de 7/22, on part du cercle numéroté 7 et on suit les flèches en notant au passage les chiffres indiqués sur celles-ci. Son développement est donc :

$$\frac{7}{22} = 0.318181818181818181818\ldots.$$

Dans l'écriture précédente, les chiffres après la virgule se découpent en la partie périodique, la *boucle* (ici `18`), et la partie qui la précède, le *prélude* (ici `3`). L'écriture compacte de 7/22 sera donc `0.3(18)`.

Question 4 Quel est le développement décimal de 1/22 ?

Question 5 Construire le graphe de division de 7 en base 10.

Question 6

1. Construire le graphe de division de 10 en base 2.
2. En déduire le développement en base 2 de 1/10, 2/10 et 3/10.

III. Détermination du développement d'un rationnel

Question 7 En se basant sur l'algorithe de Floyd, écrire une fonction

```
dvlpt : int -> int -> int -> int list * int list
```

telle que `dvlpt a d b` renvoie le développement de la division de a par d en base b sous la forme de deux listes d'entiers qui représentent respectivement les chiffres du prélude et de la boucle du développement. *Attention, cette fonction peut être délicate à mettre au point. Testez-la !* Par exemple, on veut avoir :

```
# dvlpt 7 22 10 ;;
- : int list * int list = ([3], [1; 8])
# dvlpt 23 56 10 ;;
- : int list * int list = ([4; 1; 0], [7; 1; 4; 2; 8; 5])
```

puisque l'on a

```
# 7. /. 22. ;;
- : float = 0.318181818181818177
# 23. /. 56. ;;
- : float = 0.410714285714285698
```

Question 8 Donner une suite d'instructions permettant de déterminer la 1 000 000 décimale de 2020/2021. *Vous pouvez répondre à cette question sans avoir répondu à la précédente.*

Question 9 Quelle est cette décimale ?