1. Si $z(x,y) = \ell\text{n}(x^2+xy+y^2)$, alors
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

2. Si $z(x,y) = xy + x\exp({}^{y}\!/_{x})$, alors
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z(x,y).$$

3. Si $u(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)$, alors
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

4. Si $u(x,y,z) = x + (x-y)/(y-z)$, alors
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

5. On pose
$$z(u,v) = f(x,y) \quad \text{avec} \quad x = uv, \quad y = \frac{u}{v}.$$
Alors
$$\frac{\partial z}{\partial u} = v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{u}{v^2}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

6. Avec
$$z(x,y) = \exp(xy) \quad \text{et} \quad u(x) = z\big(x, \varphi(x)\big),$$
on a
$$u'(x) = \varphi(x)e^{x\varphi(x)} + xe^{x\varphi(x)}\varphi'(x).$$

7. Si $z(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$, alors
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

8. Exprimer en fonction de f' les dérivées partielles de
$$z(x,y) = f\Big(xy + \frac{y}{x}\Big).$$

9. Si $u = f(x,y,z)$ où $y = \varphi(x)$ et $z = \psi(x,y)$, alors
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\Big[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi'(x)\frac{\partial \psi}{\partial y}\Big].$$

10. Quelle que soit la fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction
$$z(x,y) = y\varphi(x^2-y^2)$$
vérifie l'équation
$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

11. Quelle que soit la fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction
$$z(x,y) = xy + x\varphi({}^{y}\!/_{x})$$
vérifie l'équation
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

12. Calculer les dérivées partielles (par rapport à x et à y) des expressions suivantes.

$f_0(x,y) = -x^2y + 2\,xy + y^2 - x$

$f_1(x,y) = \cos\left(-y^2 + 2\,x\right)$

$f_2(x,y) = 6\,x - 3\,y$

$f_3(x,y) = e^{(3\,xy)}$

$f_4(x,y) = e^{\left(-xy^2\right)}$

$f_5(x,y) = x^2e^{(2\,y)}$

$f_6(x,y) = xye^{(2\,x)}$

$f_7(x,y) = x^y e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}$

$f_8(x,y) = x^{(y-1)}e^{(-xy)}$

$f_9(x,y) = \cos(2\,xy)$

$f_{10}(x,y) = \cos(x + 2\,y)$

$f_{11}(x,y) = e^{\left(-y^2+2\,x\right)}$

$f_{12}(x,y) = \sin\left(3\,x^2y\right)$

$f_{13}(x,y) = e^{\left(-\frac{x^2}{2\,y}\right)}$

$f_{14}(x,y) = \ell\text{n}\left(\cos\left(x^2y\right)\right)$

$f_{15}(x,y) = \ell\text{n}\left(\cos(x+y) + 1\right)$

$f_{16}(x,y) = \ell\text{n}\left(xe^y\right)$

$f_{17}(x,y) = \ell\text{n}\left(y + e^x\right)$

$f_{18}(x,y) = e^{(\sin(x) - 2\,\sin(y))}$

$f_{19}(x,y) = \sin\left(e^{(2\,x)} - e^{(-y)}\right)$

$f_{20}(x,y) = (2\,x+1)^{3\,y-1}$

$f_{21}(x,y) = \left(y^2+1\right)^{\sin(x)}$

$f_{22}(x,y) = \left(e^{(4\,x-1)}\right)^{y+2}$

$f_{23}(x,y) = \dfrac{2\,x+y}{y^2+1}$

$f_{24}(x,y) = \dfrac{\ell\text{n}(x) - \ell\text{n}(y)}{e^{(y^2)} + e^{(2\,x)}}$

Problèmes pratiques

Lorsque les valeurs des variables sont un peu modifiées, la valeur d'une fonction varie peu elle aussi et la différentielle permet d'estimer cette petite variation : sous des hypothèses souvent vérifiées dans les applications pratiques,

$$\Delta f(x,y) = f(x+\delta x,\ y+\delta y) - f(x,y) \approx \mathrm{d}f(x,y)$$

avec

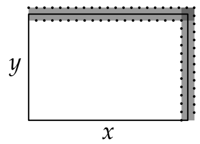
$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\delta y.$$

Il est illusoire d'utiliser cette propriété sans s'assurer d'abord que $|\delta x| \ll |x|$ et $|\delta y| \ll |y|$.

Pb 1. Deux navires appareillent simultanément du point A : l'un se dirige vers le nord à 10 nœuds, l'autre se dirige vers le nord-est à 20 nœuds. Avec quelle vitesse la distance qui les sépare croît-elle ?

Pb 2. Un fabricant de bidons cylindriques de hauteur $h = 1$ m et de rayon $r_0 = 0,25$ cm décide d'augmenter la hauteur et le rayon de 1 cm. Comparer la variation exacte du volume d'un bidon à la variation approchée du volume estimée au moyen de la différentielle.

Pb 3. La longueur x et la hauteur y d'un rectangle sont connues respectivement à 3% près et à 5% près.

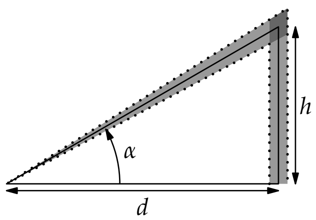


Comme l'aire $A = xy$ du rectangle vérifie

$$\frac{\delta A}{A} \approx \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y},$$

elle est connue à 8% près.

Pb 4. Observée d'une distance d, une tour est vue sous un angle α.



Quelle est la hauteur de la tour ? Si $\alpha = 30°$ à $0,5°$ près et si $d = 30$ m à 1 cm près, à quelle longueur près la hauteur de la tour est-elle connue ?

Pb 5. Le volume d'un ballon sonde sphérique varie en fonction de la pression atmosphérique P et de la température de l'air T :

$$V = V(P,T).$$

Expliquer pourquoi ${}^{\partial V}/_{\partial P} < 0$ et ${}^{\partial V}/_{\partial T} > 0$. Relier les dérivées partielles du rayon r du ballon sonde à ces dérivées partielles.

Pb 6. La consommation horaire de carburant d'un avion de tourisme, notée r, varie en fonction de l'altitude z (en pieds) et de la vitesse v (en nœuds).

❧ À l'altitude $z_0 = 8\,000$ pieds et à la vitesse $v_0 = 120$ nœuds, la consommation horaire est estimée à $27,25$ L/h. On sait aussi que

$$\frac{\partial r}{\partial z}(z_0,v_0) = -7,6.10^{-4} \quad\text{et}\quad \frac{\partial r}{\partial v}(z_0,v_0) = 0,5.$$

En quelles unités ces dérivées partielles sont-elles exprimées ? Justifier les signes de ces dérivées.

❧ On suppose que l'avion possède alors une vitesse ascensionnelle de 500 pieds par minute et une accélération de 3 nœuds par minute. Estimer la variation de r par minute.

Pb 7. La masse volumique ρ, la température T et la pression P d'un volume d'hydrogène (H_2) sont respectivement mesurées en g/cm^3, en degrés Celsius et en atmosphères. Pour $P_0 = 2$ et $T_0 = 40$, on a alors

$$\rho = 1,5.10^{-4},\quad \frac{\partial\rho}{\partial T} = -5.10^{-7},\quad \frac{\partial\rho}{\partial P} = 7,7.10^{-5}.$$

❧ Comment la masse volumique $\rho = \rho(t)$ varie-t-elle si la température $T = T(t)$ baisse de $0,2$°C par heure et que la pression $P = P(t)$ baisse de $0,06$ atmosphère par heure ?

❧ Estimer la masse volumique $\rho = \rho(T,P)$ pour $T = 50$°C et $P = P_0$, puis pour $T = T_0$ et $P = 1,8$ atmosphère.

Pb 8. Le degré d'humidité f de la laine est le quotient, exprimé en pourcentage, de la masse d'eau contenue dans la laine par la masse totale. Pour une température T_0 de 35°C et un degré d'hygrométrie relative H_0 de 75%, le degré d'humidité $f(T_0,H_0)$ est de $17,5$% et

$$\frac{\partial f}{\partial T}(T_0,H_0) = -0,06,\quad \frac{\partial f}{\partial H}(T_0,H_0) = 0,025.$$

❧ Comment le degré d'humidité $f = f(t)$ varie-t-il si la température $T = T(t)$ augmente de 2° par heure et que le degré d'hygrométrie relative $H = H(t)$ augmente de $0,4$% par heure ?

❧ Estimer le degré d'humidité $f = f(T,H)$ pour $H = H_0$ et $T = 36$°C, puis pour $H = 73$% et $T = 36$°C.

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) = -2\,xy + 2\,y - 1$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) = -x^2 + 2\,x + 2\,y$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2\,\sin\left(y^2 - 2\,x\right)$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -2\,y\sin\left(y^2 - 2\,x\right)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 6$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -3$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = 3\,ye^{(3\,xy)}$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = 3\,xe^{(3\,xy)}$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) = -y^2e^{\left(-xy^2\right)}$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y) = -2\,xye^{\left(-xy^2\right)}$$
$$\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,y) = 2\,xe^{(2\,y)}$$
$$\frac{\partial f_5}{\partial y}(x,y) = 2\,x^2e^{(2\,y)}$$
$$\frac{\partial f_6}{\partial x}(x,y) = (2\,x+1)ye^{(2\,x)}$$
$$\frac{\partial f_6}{\partial y}(x,y) = xe^{(2\,x)}$$
$$\frac{\partial f_7}{\partial x}(x,y) = (xy+1)x^{(y-2)}e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}$$
$$\frac{\partial f_7}{\partial y}(x,y) = x^ye^{\left(-\frac{1}{x}\right)}\,\ell\mathrm{n}\,(x)$$
$$\frac{\partial f_8}{\partial x}(x,y) = -(xy-y+1)x^{(y-2)}e^{(-xy)}$$
$$\frac{\partial f_8}{\partial y}(x,y) = -(x-\ell\mathrm{n}\,(x))x^{(y-1)}e^{(-xy)}$$
$$\frac{\partial f_9}{\partial x}(x,y) = -2\,y\sin(2\,xy)$$
$$\frac{\partial f_9}{\partial y}(x,y) = -2\,x\sin(2\,xy)$$
$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x}(x,y) = -\sin(x+2\,y)$$
$$\frac{\partial f_{10}}{\partial y}(x,y) = -2\,\sin(x+2\,y)$$
$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x}(x,y) = 2\,e^{\left(-y^2+2\,x\right)}$$
$$\frac{\partial f_{11}}{\partial y}(x,y) = -2\,ye^{\left(-y^2+2\,x\right)}$$
$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x}(x,y) = 6\,xy\cos\left(3\,x^2y\right)$$
$$\frac{\partial f_{12}}{\partial y}(x,y) = 3\,x^2\cos\left(3\,x^2y\right)$$
$$\frac{\partial f_{13}}{\partial x}(x,y) = -\frac{xe^{\left(-\frac{x^2}{2\,y}\right)}}{y}$$
$$\frac{\partial f_{13}}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2e^{\left(-\frac{x^2}{2\,y}\right)}}{2\,y^2}$$
$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x}(x,y) = -\frac{2\,xy\sin\left(x^2y\right)}{\cos\left(x^2y\right)}$$
$$\frac{\partial f_{14}}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^2\sin\left(x^2y\right)}{\cos\left(x^2y\right)}$$
$$\frac{\partial f_{15}}{\partial x}(x,y) = -\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+1}$$
$$\frac{\partial f_{15}}{\partial y}(x,y) = -\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+1}$$
$$\frac{\partial f_{16}}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial f_{16}}{\partial y}(x,y) = 1$$
$$\frac{\partial f_{17}}{\partial x}(x,y) = \frac{e^x}{y+e^x}$$
$$\frac{\partial f_{17}}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y+e^x}$$
$$\frac{\partial f_{18}}{\partial x}(x,y) = e^{(\sin(x)-2\,\sin(y))}\cos(x)$$
$$\frac{\partial f_{18}}{\partial y}(x,y) = -2\,e^{(\sin(x)-2\,\sin(y))}\cos(y)$$
$$\frac{\partial f_{19}}{\partial x}(x,y) = 2\,e^{(2\,x)}\cos\left(\left(e^{(2\,x+y)}-1\right)e^{(-y)}\right)$$
$$\frac{\partial f_{19}}{\partial y}(x,y) = e^{(-y)}\cos\left(\left(e^{(2\,x+y)}-1\right)e^{(-y)}\right)$$
$$\frac{\partial f_{20}}{\partial x}(x,y) = 2\,(3\,y-1)(2\,x+1)^{(3\,y-2)}$$
$$\frac{\partial f_{20}}{\partial y}(x,y) = 3\,(2\,x+1)^{(3\,y-1)}\,\ell\mathrm{n}\,(2\,x+1)$$
$$\frac{\partial f_{21}}{\partial x}(x,y) = \left(y^2+1\right)^{\sin(x)}\,\ell\mathrm{n}\left(y^2+1\right)\cos(x)$$
$$\frac{\partial f_{21}}{\partial y}(x,y) = 2\,y\left(y^2+1\right)^{(\sin(x)-1)}\sin(x)$$
$$\frac{\partial f_{22}}{\partial x}(x,y) = 4\,(y+2)e^{(4\,xy+8\,x-y-2)}$$
$$\frac{\partial f_{22}}{\partial y}(x,y) = (4\,x-1)e^{(4\,xy+8\,x-y-2)}$$
$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{y^2+1}$$
$$\frac{\partial f_{23}}{\partial y}(x,y) = -\frac{4\,xy+y^2-1}{\left(y^2+1\right)^2}$$
$$\frac{\partial f_{24}}{\partial x}(x,y) = \frac{e^{2x}(1+2x\,\ell\mathrm{n}(y/x))+e^{y^2}}{x(e^{y^2}+e^{2x})^2}$$
$$\frac{\partial f_{24}}{\partial y}(x,y) = \frac{e^{y^2}(2y^2\,\ell\mathrm{n}(y/x)-1)-e^{2x}}{y(e^{y^2}+e^{2x})^2}$$