Normes [66.]

1. Quelle que soit la colonne X,

$$\|AX\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right|.$$

D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^n$,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}x_j|$$

et comme le maximum est un majorant,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad |a_{i,j}x_j| \leqslant |a_{i,j}|\, \|X\|_\infty.$$

En sommant ces inégalités sur j, on obtient

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \left[\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right] \|X\|_\infty.$$

Comme le facteur $\|X\|_\infty$ est positif et indépendant de i, on en déduit enfin que

$$\|AX\|_\infty \leqslant \left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right] \|X\|_\infty.$$

Cette majoration (cf **[61.2 - 3°]**) justifie l'existence de $|||A|||$ et prouve déjà que

$$|||A||| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|. \tag{1}$$

❧ Toute famille *finie* de nombres réels possède un plus grand élément, donc il existe un indice entier $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ tel que

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|.$$

Par ailleurs, il existe une colonne $X_0 = (\pm 1, \dots, \pm 1)$ telle que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|$$

(on choisit x_j du signe de $a_{i_0,j}$). On en déduit alors que

$$\|AX_0\|_\infty \geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j\right| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|. \tag{2}$$

Or $\|X_0\|_\infty = 1$, donc **[65.1]**

$$\|AX_0\|_\infty \leqslant |||A|||\, \|X_0\|_\infty = |||A|||. \tag{3}$$

Les relations (2) et (3) établissent l'inégalité réciproque de (1). Par conséquent,

$$|||A||| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|.$$

2. Soit λ, une valeur propre de A. Il existe donc une colonne X_0, *non nulle,* telle que $AX_0 = \lambda X_0$.

Par conséquent (cf **[61.2-1°]**)

$$|\lambda|\, \|X_0\|_\infty = \|\lambda X_0\|_\infty = \|AX_0\|_\infty \leqslant |||A|||\, \|X_0\|_\infty.$$

Comme $X_0 \neq 0$, alors $\|X_0\|_\infty > 0$, donc on peut simplifier l'inégalité par $\|X_0\|_\infty$ et obtenir ainsi

$$|\lambda| \leqslant |||A|||.$$