Comme u_n est un produit de réels *strictement positifs*,

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1 - \frac{1}{3k}\Big)$$

et comme $\ln(1-x) \sim -x$ lorsque x tend vers 0, il semble logique de comparer $\ln u_n$ à la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{3k}.$$

❧ On pose donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad v_k = \ln\Big(1 - \frac{1}{3k}\Big) + \frac{1}{3k}$$

de telle sorte que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \ln u_n = \frac{-1}{3} H_n + \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

où on a noté H_n, la n-ième somme partielle de la série harmonique.

D'après le développement limité à l'ordre deux de $\ln(1+x)$ au voisinage de $x = 0$,

$$v_k = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$$

lorsque k tend vers $+\infty$. Comme la série de Riemann $\sum {}^1\!/_{k^2}$ est une série *convergente* de terme général *positif*, la série $\sum v_k$ est *absolument convergente*, et donc convergente. On en déduit que

$$\ln u_n = \frac{-1}{3} H_n + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

pour tout $n \geqslant 1$, puis que

$$\ln u_n = \frac{-1}{3}\big[\ln n + \gamma + o(1)\big] + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k + o(1)$$

d'après l'estimation du **[48]** et le fait que le reste d'une série convergente soit *toujours* $o(1)$.

En posant

$$a = \frac{-1}{3} \quad \text{et} \quad b = \frac{-\gamma}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k,$$

on obtient bien que

$$\ln u_n = a \ln n + b + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ En posant maintenant $K = e^b$, on en déduit que

$$u_n = \exp[\ell n\, u_n] = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \times K \times e^{\mathcal{O}(1)}$$

et comme exp tend vers 1 au voisinage de 0, on en déduit enfin que

$$u_n \sim \frac{K}{\sqrt[3]{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme la série de Riemann

$$\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

est une série *divergente* de terme général *positif*, cette relation démontre que la série $\sum u_n$ est divergente.

Remarques

❧ L'expression $o(1)$ indique une quantité (*variable*...) qui tend vers 0. Comme la fonction exp tend vers 1 au voisinage de 0, l'expression $e^{\mathcal{O}(1)}$ indique une quantité qui tend vers 1. Cette remarque est très utile pour mettre en évidence une équivalence, puisque :

$$a_n \sim b_n \iff b_n = a_n \times e^{\mathcal{O}(1)}.$$

❧ Je constate sur vos copies que la plupart d'entre vous ne se soucient toujours pas de chercher à comprendre ce qu'ils écrivent et en particulier de chercher à savoir *quel est le paramètre variable dans une expression*...

Lorsqu'on écrit

$$\ell n\Big(1 - \frac{1}{3k}\Big) \sim \frac{-1}{3k}$$

il est clair que c'est le paramètre k qui varie (et qui tend vers $+\infty$).

Lorsqu'on écrit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ell n\, n$$

il est clair que c'est le paramètre n qui varie (et qui tend vers $+\infty$). Le paramètre k, en tant que *variable muette* (ou *variable locale*), n'existe tout simplement pas...

Lorsqu'on écrit

$$v_k = o\Big(\frac{1}{k}\Big) \implies \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} o\Big(\frac{1}{k}\Big)$$

le paramètre variable dans la première relation est k tandis que le paramètre variable dans la seconde est n. Écrire une telle implication est donc une monstrueuse absurdité. Et si vous lisez votre cours avec un peu de soin, vous verrez que cela n'a **rien** à voir avec un théorème de sommation des relations de comparaison.