Normes [55.1]

On travaille dans l'espace

$$E = \ell^\infty(\mathbb{R})$$

des suites réelles bornées.

Domination.

Soit $u \in E$: il existe $M = \|u\|_\infty \geqslant 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$

On fixe (provisoirement) $0 \leqslant x < 1$. On sait que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n x^n| \leqslant M x^n$$

et comme $0 \leqslant x < 1$, la série $\sum M x^n$ est une série convergente de terme général positif (série *géométrique*). D'après le théorème de comparaison, la série $\sum |u_n x^n|$ converge et comme la convergence absolue implique la convergence (au moins pour les séries numériques), la série $\sum u_n x^n$ converge et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n x^n| \leqslant M \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{M}{1-x}.$$

On peut donc considérer la fonction $S(u)$ définie par

$$S(u)(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

Ce qui précède montre que la fonction $S(u)$ est bornée sur $[0, 1[$ et que

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad \left|S(u)(x)\right| \leqslant M = \|u\|_\infty.$$

Le majorant étant indépendant de x, on peut passer au sup et en déduire que

$$\|u\| = \|S(u)\|_\infty \leqslant M = \|u\|_\infty.$$

❧ **Norme ?**

Encore faut-il vérifier que $\|\cdot\|$ est effectivement une norme sur E...

❧ On a démontré que $\|\cdot\|$ était bien une application de E dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives.

❧ Si $\|u\| = 0$, alors $\|S(u)\|_\infty = 0$, donc en particulier

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = 0.$$

Comme la longueur de l'intervalle $[0, 1[$ est *strictement* positive, on peut invoquer l'unicité du développement en série entière (je présente mes excuses aux $3/2$) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$$

c'est-à-dire $u = 0_E$.

❧ Quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $0 \leqslant x < 1$,

$$\left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) x^n \right| = |\lambda| \left| S(u)(x) \right|$$

donc

$$\|\lambda u\| = |\lambda|\, \|S(u)\|_\infty = |\lambda|\, \|u\|.$$

❧ Soient u et v dans E. Pour tout $0 \leqslant x < 1$, par inégalité triangulaire (sur des nombres réels),

$$\begin{aligned}\left|(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)x^n\right| \\ &\leqslant (1-x)\left(\left|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{+\infty}v_n x^n\right|\right) \\ &\leqslant \|S(u)\|_\infty + \|S(v)\|_\infty\end{aligned}$$

puisque la borne supérieure est un majorant. On a trouvé ici un majorant indépendant de x, donc on peut passer au sup :

$$\left\|S(u+v)\right\|_\infty \leqslant \left\|S(u)\right\|_\infty + \|S(v)\|_\infty$$

c'est-à-dire

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

❧ On a ainsi démontré que $\|\cdot\|$ était une norme sur E.

❧ **Étude de la réciproque.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite

$$u_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

dont l'unique terme non nul est le terme d'indice n. Cette suite est bornée, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de vecteurs de E.

D'autre part, il est bien clair que

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}|u_{n,k}| = u_{n,n} = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin, en notant S_n au lieu de $S(u_n)$, on sait que

$$\|u_n\| = \|S_n\|_\infty$$

où, par définition,

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad S_n(x) = (1-x)x^n.$$

On a donc

$$S_n'(x) = x^{n-1}[n-(n+1)x],$$

ce qui prouve que la fonction S_n est croissante sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ et décroissante sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$.

Comme $S_n(0) = S_n(1) = 0$, on en déduit des variations de S_n que cette fonction est positive et donc que

$$\|S_n\|_\infty = \sup_{0\leqslant x<1}\left|S_n(x)\right| = S_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

et, en revenant à la définition de S_n,

$$0 \leqslant \|S_n\|_\infty = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

donc $\|u_n\|$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— On doit savoir calculer très vite un équivalent de $\|S_n\|_\infty$ (même si, ici, cela ne sert à rien).