Normes [33.2]

On travaille dans l'espace vectoriel

$$E = \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R}).$$

❧ Si $f \in E$, alors la fonction f ainsi que sa dérivée f' sont *continues* sur le *segment* $[a, b]$, donc elles y sont bornées. Ainsi, les expressions $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ sont bien définies et comme ce sont deux réels positifs, on en déduit que

$$\|f\|_{\mathscr{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

est bien définie et appartient bien à $\mathbb{R}_+$.

❧ **Séparation des points.**
Comme $\|f'\|_\infty \geqslant 0$, alors

$$\forall\, f \in E, \quad 0 \leqslant \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_{\mathscr{C}^1}.$$

En particulier, si $\|f\|_{\mathscr{C}^1} = 0$, alors $\|f\|_\infty = 0$ et donc $f = 0_E$ (puisque $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E).

❧ **Homogénéité.**
Quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$,

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{\mathscr{C}^1} &= \|\lambda f\|_\infty + \|(\lambda f)'\|_\infty \\
&= \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda \cdot f'\|_\infty && (*) \\
&= |\lambda|\, \|f\|_\infty + |\lambda|\, \|f'\|_\infty && (**) \\
&= |\lambda|\, \|f\|_{\mathscr{C}^1}
\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation $(*)$ et parce que $\|\cdot\|_\infty$ est positivement homogène $(**)$ comme toutes les normes.

❧ **Inégalité triangulaire.**
Quelles que soient les fonctions f et g dans E,

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{\mathscr{C}^1} &= \|f + g\|_\infty + \|(f + g)'\|_\infty \\
&= \|f + g\|_\infty + \|f' + g'\|_\infty && (*) \\
&\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty && (**) \\
&\leqslant \|f\|_{\mathscr{C}^1} + \|g\|_{\mathscr{C}^1}
\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation $(*)$ et parce que $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité triangulaire $(**)$ comme toutes les normes.

❧ Ainsi $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1}$ est bien une norme sur E.