[59.1] La fonction f définie par

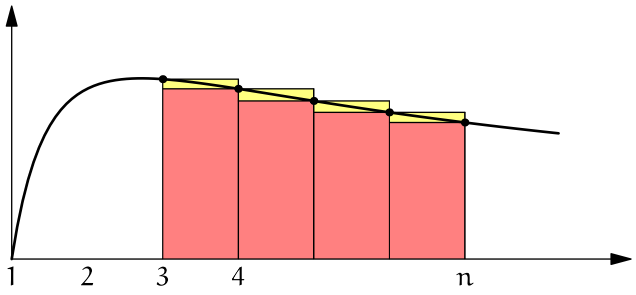
$$\forall\, t > 1, \quad f(t) = \frac{\ell n\, t}{t}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, t > 1, \quad f'(t) = \frac{1 - \ell n\, t}{t^2}$$

donc f est décroissante sur $[e, +\infty[$ et $\max_{t>0} f(t) = f(e) = e^{-1}$.

❧ La figure suivante :



justifie l'encadrement

$$\forall\, n \geqslant 4, \quad \sum_{k=4}^{n} f(k) \leqslant \int_3^n f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=3}^{n-1} f(k)$$

et donc que

$$f(2) + \int_3^n f(t)\, dt + f(n) \leqslant S_n \leqslant f(2) + f(3) + \int_3^n f(t)\, dt. \tag{1}$$

Or

$$\forall\, n \geqslant 4, \quad \int_3^n \frac{1}{t}\, \ell n\, t\, dt = \Big[\frac{1}{2}\, \ell n^2\, t\Big]_3^n$$

et comme f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, on déduit de (1) que

$$S_n - \frac{\ell n^2\, n}{2} = \mathcal{O}(1) \tag{2}$$

et donc (ce qui est moins précis) que

$$S_n \sim \frac{\ell n^2\, n}{2}. \tag{3}$$

❧ Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\ell n(n-1) = \ell n\Big[n\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big] = \ell n\, n - \frac{1}{n} + \mathcal{O}(1/n^2)$$

et par conséquent

$$\ell n^2(n-1) = \ell n^2\, n - \frac{2\, \ell n\, n}{n} + o\Big(\frac{\ell n\, n}{n^2}\Big)$$

d'où enfin

$$u_n = \mathcal{O}\Big(\frac{\ell n\, n}{n^2}\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{\ell n\, n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}\Big) = o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big). \tag{4}$$

La série $\sum 1/n\sqrt{n}$ est une série *convergente* de terme général *positif* (série de Riemann), donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

En notant U, la somme de la série $\sum u_n$, on a donc

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = U + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$, mais aussi (somme télescopique)

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = S_n - \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln^2 k - \ln^2(k-1)}{2} = S_n - \frac{\ln^2 n}{2}.$$

On en déduit que

$$S_n = \frac{\ln^2 n}{2} + U + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Ce développement asymptotique est plus précis que (3), et aussi plus précis que (2) (*toute suite convergente est bornée* mais la réciproque est fausse).

[59.2] On fait le lien avec ce qui précède :

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad k^{1/k} = \exp\frac{\ln k}{k} = \exp[f(k)].$$

D'après le développement limité à l'ordre 2 de exp au voisinage de 0, il existe une suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad k^{1/k} = 1 + f(k) + v_k \quad \text{et que} \quad v_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\big(f^2(k)\big). \qquad (5)$$

Comme

$$f^2(k) = \frac{\ln^2 k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k\sqrt{k}} = o\Big(\frac{1}{k^{3/2}}\Big)$$

et que la série $\sum {}^{1}/_{k\sqrt{k}}$ est une série *convergente* de terme général *positif* (série de Riemann), on en déduit que $\sum v_k$ est (absolument) convergente et donc qu'il existe un réel

$$T = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$$

tel que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = T - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = T + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

On déduit alors de (5) et de **[59.1]** que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^{1/k} &= \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} v_k \\
&= n + S_n + [T + o(1)] \\
&= n + \Big[\frac{\ln^2 n}{2} + c + o(1)\Big] + [T + o(1)] \\
&= n + \frac{\ln^2 n}{2} + \underbrace{(c+T)}_{K} + o(1)
\end{aligned}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.