Tous les facteurs du produit

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \Big(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\Big)$$

sont strictement positifs, donc le logarithme de p_n est la somme partielle de rang n de la série de terme général

$$u_k = \ell n\Big(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\Big).$$

D'après le développement limité à l'ordre 2 de $\ell n(1+x)$ au voisinage de $x = 0$, il existe une suite $(v_k)_{k \geqslant 2}$ telle que

$$\forall\, k \geqslant 2, \quad u_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + v_k$$

et que

$$v_k \underset{k \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^{3/2}}\Big).$$

❧ Comme $\sum {}^1/_{k^{3/2}}$ est une série *convergente* de terme général *positif*, la série $\sum v_k$ est (absolument) convergente. D'après le théorème de sommation des ordres de grandeur **[71.1]** et l'équivalent **[27.2]**,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \mathcal{O}\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. En notant σ_3, la somme de la série $\sum v_k$, on en déduit que

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sigma_3 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Comme ${}^1/_{\sqrt{k}}$ tend vers 0 en décroissant, la série $\sum {}^{(-1)^k}/_{\sqrt{k}}$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. Par conséquent, cette série est convergente et, pour tout $n \geqslant 1$, le reste d'ordre n est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé, donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. En notant σ_1, la somme de cette série alternée, on en déduit que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sigma_1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Enfin, la série $\sum {}^1/_{2k}$ est une série *divergente* de terme général *positif* (série harmonique) et d'après **[48.2]**

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{\ell n\, n}{2} + \gamma + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Finalement,

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \frac{-\ln n}{2} + \underbrace{(\sigma_1 + \gamma + \sigma_3)}_{K} + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. En composant par exp, on en déduit que

$$p_n = \exp\left(\frac{-\ln n}{2}\right) \cdot \exp(K) \cdot \exp[o(1)] \sim \frac{e^K}{\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$ (puisque exp tend vers 1 au voisinage de 0).

REMARQUE.— Si on ne connaît pas la constante d'Euler et qu'on sait seulement que $H_n \sim \ln n$, c'est-à-dire $H_n = \ln n + o(\ln n)$, alors on a seulement

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \frac{-\ln n}{2} + o(\ln n)$$

et l'ordre de grandeur de $\exp[o(\ln n)]$ est *inconnu* (on ne peut même pas savoir si une telle quantité est bornée).