❧ Pour $x \leqslant 0$, le terme général $u_n = e^{-x\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Pour $x > 0$,

$$n^2 u_n = \exp(-x\sqrt{n} + 2\,\ell n\, n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n = o(1/n^2)$ et la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

La fonction S est donc définie sur $]0, +\infty[$ (et seulement sur cet intervalle).

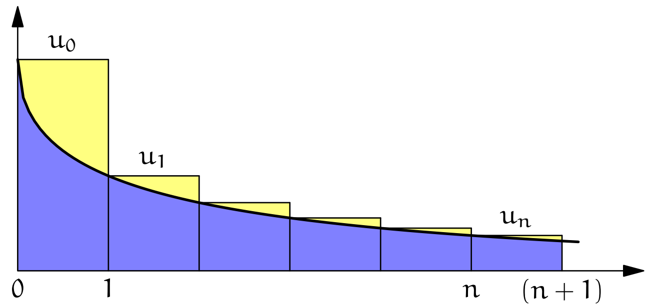
❧ La somme d'une série de terme général *positif* majore chacun des termes de la série, donc

$$\forall\, x > 0, \quad S(x) \geqslant 1 = e^{-x\sqrt{0}}.$$

❧ Soit $x > 0$. La fonction

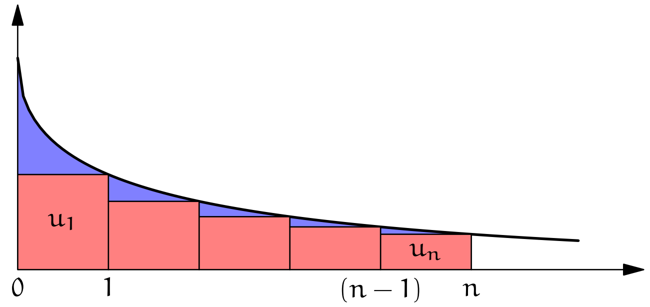
$$f = \left[t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}\right]$$

est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.



On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 0, \quad \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$$



et que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \int_0^n f(t)\,dt.$$

En posant $t = u^2$, on a $dt = 2u\,du$, donc

$$\forall\, a \geqslant 0, \quad \int_0^a e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{a}} u e^{-xu}\,du.$$

En intégrant par parties,

$$\int_0^{\sqrt{a}} u e^{-xu}\,du = \frac{-\sqrt{a}}{x} \cdot e^{-x\sqrt{a}} + \frac{1 - e^{-x\sqrt{a}}}{x^2}$$

et l'expression trouvée tend vers $1/x^2$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Comme la série $\sum u_n$ converge, on peut donc faire tendre n vers $+\infty$ et passer à la limite dans l'encadrement des sommes partielles, ce qui donne :

$$\frac{2}{x^2} \leqslant S(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}.$$

❧ D'après ce qui précède,

$$\forall\, x > 0, \quad 1 \leqslant S(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2},$$

donc $S(x)$ tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ (par encadrement).

On a aussi démontré que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{2}{x^2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{2}{x^2} + 1$$

ce qui prouve que

$$S(x) = \frac{2}{x^2} + \mathcal{O}(1) = \frac{2}{x^2} + o(1/x^2)$$

au voisinage de 0. Autrement dit,

$$S(x) \sim \frac{2}{x^2}.$$