Comme $1/k$ tend vers 0 en décroissant, la série alternée

$$\sum \frac{(-1)^k}{k}$$

converge, donc R_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en tant que reste d'ordre n d'une série convergente).

❧ On isole le premier terme de R_n pour obtenir la première égalité :

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}. \tag{1}$$

On effectue un changement d'indice dans l'expression de R_{n+1} pour obtenir la seconde égalité :

$$R_{n+1} = \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

d'où l'on tire :

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \Big[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big] = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}. \tag{2}$$

3. D'après le critère spécial des séries alternées, le reste R_n est du signe du premier terme négligé, c'est-à-dire du signe de $(-1)^{n+1}$: l'énoncé est donc clairement faux !

❧ En sommant (1) et (2), on obtient

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}. \tag{3}$$

Il est clair que

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{4}$$

D'autre part, la suite de terme général

$$u_k = \frac{1}{k(k+1)}$$

tend vers 0 en décroissant, donc le critère spécial des séries alternées permet de majorer le reste :

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \Big| \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \tag{5}$$

Les estimations (4) et (5) nous donnent donc

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{6}$$

Dans (6), R_n apparaît comme la somme du terme général d'une série qui vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées et du terme général d'une série absolument convergente, donc la série $\sum R_n$ converge.

En ne conservant que le premier terme du développement asymptotique (6),

$$R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n},$$

ce qui prouve que $\sum |R_n|$ est divergente.

La série $\sum R_n$ est donc convergente, mais pas absolument convergente : elle est semi-convergente.