Séries numériques [28.4]

❧ Pour chaque entier $1 \leqslant k \leqslant p$, il est clair que

$$\frac{1}{n+k} \underset{n\to+\infty}{\sim} {}^1\!/_n \underset{n\to+\infty}{=} {}^1\!/_n + o({}^1\!/_n).$$

On peut sommer terme à terme un nombre $\boxed{\textbf{fixé}}$ de développements asymptotiques, donc

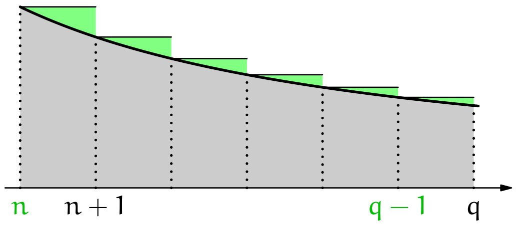
$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{p}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{n}.$$

❧ Cette méthode ne peut pas s'appliquer pour étudier la somme

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n+k}$$

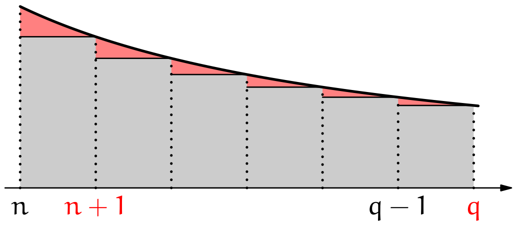
car cette fois le nombre de termes n'est pas fixé (il y a $(n+1)$, ils sont donc de plus en plus nombreux).

❧ On compare cette somme à une intégrale. Tout d'abord,



$$\forall\, q > n, \quad \int_n^q \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{q-1} \frac{1}{k}$$

et d'autre part



$$\forall\, q > n, \quad \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^q \frac{dt}{t}.$$

On en déduit, selon la manipulation habituelle, que

$$\ell n \frac{q}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{k} \leqslant \ell n \frac{q}{n}.$$

En particulier, pour $q = 2n$, on obtient

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \ell n\, 2 - \frac{1}{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \ell n\, 2.$$

Le majorant et le minorant tendent tous les deux vers $\ell n\, 2$, donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell n\, 2$$

d'après le Théorème d'encadrement.

❧ La même comparaison de somme et d'intégrale pouvait s'appliquer pour $q = n + p$. Mais dans ce cas le Théorème d'encadrement donnait seulement

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui est moins précis que ce qu'on attendait.