Séries numériques [18, 57.3, 86]

[57.3] On démontre la convergence de la série alternée $\sum u_n$ au moyen d'un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{2}{n^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big). \tag{1}$$

(Le terme général tend évidemment vers 0, mais on peut vérifier que $|u_n|$ n'est pas une fonction *décroissante* de n : il est donc impossible d'appliquer le Critère spécial des séries alternées.)

Posons donc

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad w_n = u_n - v_n.$$

On peut évidemment appliquer le Critère spécial des séries alternées à $\sum v_n$. D'autre part, on a démontré avec (1) que

$$w_n \sim \frac{-2}{n^2},$$

donc $\sum w_n$ est une série absolument convergente.

En tant que somme de deux séries convergentes, la série $\sum u_n$ est convergente.

[86] Notons R_n, R_n^1 et R_n^2, les restes respectifs des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad |R_n| \leqslant |R_n^1| + |R_n^2|. \tag{2}$$

D'après le Critère spécial des séries alternées,

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad |R_n^1| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

donc

$$R_n^1 = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{3}$$

Comme $\sum 1/n^2$ est une série *convergente* de terme général *positif* et que $w_n \sim -2/n^2$, alors

$$R_n^2 \sim -2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

(théorème de sommation des ordres de grandeur). On *sait* que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n},$$

donc

$$R_n^2 \sim \frac{-2}{n}. \tag{4}$$

On déduit alors de (2), (3) et (4) que

$$R_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

REMARQUE.— Pour obtenir une meilleure précision, il faudrait améliorer l'ordre de grandeur du reste de $\sum v_n$: le Critère spécial fournit un encadrement simple mais (ou : donc) assez grossier du reste.