❧ On rappelle que $\sum 1/k^\alpha$ est convergente pour tout $\alpha > 1$.
1. On commence par remarquer que

$$\forall\, \alpha > 1, \quad \zeta(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}. \tag{1}$$

La fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{1}{t^\alpha} = e^{-\alpha \ln t}$$

est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Cela permet de majorer la somme au second membre de (1) par une intégrale :

$$\forall\, p \geqslant 3, \quad \sum_{k=3}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{3^\alpha} + \int_3^p \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Comme la série converge et que

$$\int_3^p \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \left(\frac{1}{3^{\alpha-1}} - \frac{1}{p^{\alpha-1}}\right) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \frac{1}{(\alpha-1)3^{\alpha-1}}$$

on peut faire tendre p vers $+\infty$ dans (1) :

$$\forall\, \alpha > 1, \quad 0 \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)3^{\alpha-1}}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{3^\alpha}\right) \tag{2}$$

et donc que

$$\zeta(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{3^\alpha}\right)$$

lorsque α tend vers $+\infty$.

En particulier, ζ tend vers 1 au voisinage de $+\infty$.

2. On procède de manière analogue mais avec un encadrement :

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \frac{1}{\alpha - 1} \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{1^\alpha} \tag{3}$$

où

$$\frac{1}{\alpha - 1} = \lim_{p \to +\infty} \int_1^p \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On déduit immédiatement de (3) que $(\alpha - 1)\zeta(\alpha)$ tend vers 1 lorsque α tend vers 1. Par conséquent,

$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha \to 1}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}.$$

En particulier, ζ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$ fixé,

$$\frac{1}{k(nk+1)} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k^2}$$

et comme la série $\sum {}^1\!/_{k^2}$ converge absolument, on en déduit que la somme étudiée

$$S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)}$$

est bien définie pour tout $n \geqslant 1$.

On ne peut pas appliquer un théorème de sommation des ordres de grandeur : ces théorèmes s'appliquent aux sommes partielles ou aux restes de séries et pas au cas où, comme ici, le terme général dépend d'un paramètre.

Néanmoins, il est intelligent de commencer par calculer un développement asymptotique : pour tout entier $k \geqslant 1$ *fixé*, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{k(nk+1)} = \frac{1}{nk^2} - \frac{1}{n^2k^3} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{4}$$

Pour le moment, on n'a rien prouvé mais on a *au moins compris pourquoi* on compare

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Comme

$$\forall\, k, n \geqslant 1, \quad \frac{1}{k(nk+1)} - \frac{1}{nk^2} = \frac{-1}{nk^2(nk+1)},$$

alors

$$\forall\, k, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{nk^2} - \frac{1}{k(nk+1)} \leqslant \frac{1}{n^2k^3}.$$

À n fixé, les quantités qui apparaissent dans cet encadrement sont les termes généraux de trois séries convergentes, ce qui permet de sommer ces encadrements de $k = 1$ jusqu'à l'infini :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n}\zeta(2) - S_n \leqslant \frac{1}{n^2}\zeta(3).$$

On déduit de ce nouvel encadrement que

$$\frac{1}{n}\zeta(2) - S_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

c'est-à-dire

$$S_n = \frac{\zeta(2)}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque.— En poussant plus loin le développement (4) et en reprenant les encadrements, on obtiendrait un développement plus précis de la somme étudiée. Par exemple :

$$S_n = \frac{\zeta(2)}{n} - \frac{\zeta(3)}{n^2} + \frac{\zeta(4)}{n^3} - \frac{\zeta(5)}{n^4} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^5}\Big).$$