**Lycée Pierre CORNEILLE**
**ANNÉE SCOLAIRE 2020/2021**

**MP - MP***

# Composition de Mathématiques

Le 9 septembre 2019 – De 13 heures à 17 heures

---

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

*La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.*

**Les calculatrices sont interdites.**
**Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.**

## ❖ I – Problème ❖

**1.** Tracer l'allure du graphe de la fonction

$$f = [x \mapsto 2 + \ln x].$$

**2.** Démontrer que l'équation

$$x = 2 + \ln x$$

admet deux solutions réelles

$$\alpha < \beta.$$

**3. a.** Démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant x \leqslant \beta, \quad 1 \leqslant 2 + \ln x \leqslant \beta.$$

**3. b.** Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leqslant a \leqslant \beta$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de

$$x_0 = a$$

et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = 2 + \ln x_n.$$

Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\beta$.

**3. c.** En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta$.

**4.** Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $\beta \leqslant b$. On considère la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de

$$y_0 = b$$

et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = 2 + \ln y_n.$$

Étudier le comportement asymptotique de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**5.** On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au **3.b.**

**5. a.** Trouver deux réels $a < \beta < b$.

**5. b.** En déduire un réel $0 < \theta < 1$ tel que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \beta + o(\theta^n).$$

## ❖ II – Problème ❖

### Partie A. Étude d'un endomorphisme

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(e_1) = \frac{1}{3}\cdot(e_2 + e_3), \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}\cdot e_1.$$

**1.** Citer précisément le théorème qui affirme que $f$ est bien défini.

**2.** Écrire la matrice $M$ qui représente $f$ dans la base $\mathscr{B}$.

**3.** Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$, une base de $\operatorname{Ker}(3f - 2I)$, une base de $\operatorname{Ker}(f + I)$ et une base de $\operatorname{Ker}(3f + 2I)$.

**4.** On pose

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**4. a.** Justifier, *avec le moins de calculs possibles*, que la matrice $P$ est inversible.

**4. b.** Déterminer, sans autres calculs, la matrice diagonale $D$ telle que

$$M = PDP^{-1}.$$

**4. c.** Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{4}\cdot Q$.

**4. d.** Démontrer par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k = PD^kP^{-1}.$$

**4. e.** En déduire la première colonne de la matrice $M^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

### Partie B. Étude d'un processus aléatoire

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On procède à des tirages successifs d'une boule avec remise.

On **admet** qu'il existe une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui modélisent ces tirages de la manière suivante.

- La valeur de la variable aléatoire $X_1$ est le numéro de la première boule tirée.
- Si $X_k$ a pris la valeur 1, alors la valeur de $X_{k+1}$ est le numéro de la boule tirée lors du $(k+1)$-ième tirage.
- Si $X_k$ a pris une valeur $j \neq 1$, alors la valeur de $X_{k+1}$ est égale à $j$ si la boule tirée lors du $(k+1)$-ième tirage est la boule qui porte le numéro $j$ et la valeur de $X_{k+1}$ est égale à 1 dans le cas contraire.

**5.** Quelle est la loi de $X_1$ ?

**6.** Démontrer que

$$\big([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3]\big)$$

est un système complet d'événements.

**7.** On pose

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_k = 1) \\ \mathbf{P}(X_k = 2) \\ \mathbf{P}(X_k = 3) \end{pmatrix}.$$

**7. a.** En s'inspirant de la description du processus aléatoire, déterminer les probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j)$$

en fonction des entiers $1 \leqslant i, j \leqslant 3$.

**7. b.** En déduire une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad U_{k+1} = AU_k.$$

On écrira cette matrice sous la forme $M + rI_3$ pour un réel $r$ bien choisi.

**8. a.** En déduire que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2} \cdot \big(1 + (-1/3)^k\big),$$
$$\mathbf{P}(X_k = 2) = \mathbf{P}(X_k = 3) = \frac{1}{4} \cdot \big(1 - (-1/3)^k\big).$$

**8. b.** Calculer la limite lorsque $k$ tend vers $+\infty$ de la probabilité $\mathbf{P}(X_k = i)$ en fonction de $1 \leqslant i \leqslant 3$.

**9.** Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

### Partie C. Simulation informatique

Extrait de la documentation du module `numpy.random`

`random_integers(low, high=None, size=None)`
*Return random integers between* `low` *and* `high`*, inclusive.*
*Return random integers from the* discrete uniform *distribution in the closed interval* `[low, high]`*. If* `high` *is* `None` *(the default), then results are from* `[1, low]`.
*Parameters*

- `low` *: int*
  *Lowest (signed) integer to be drawn from the distribution (unless* `high=None`*, in which case this parameter is the* ***highest*** *such integer).*
- `high` *: int, optional*
  *If provided, the largest (signed) integer to be drawn from the distribution (see above for behavior if* `high=None`*).*
- `size` *: int or tuple of ints, optional*
  *Output shape. If the given shape is, e.g.,* $(m, n, k)$*, then* $m \times n \times k$ *samples are drawn. Default is* `None`*, in which case a single value is returned.*

*Returns*

- `out` *: int or ndarray of ints*
  `size`*-shaped array of random integers from the appropriate distribution, or a single such random int if* `size` *not provided.*

**10.** Écrire un code qui simule $N$ tirages successifs dans l'urne.

**11.** On suppose que les résultats de $N$ tirages successifs sont rassemblés dans un tableau numpy `T`. Écrire une fonction `processus` telle que l'exécution de `processus(T)` retourne les valeurs $X_1, \ldots, X_N$ associées à ces tirages sous forme d'une liste.

## ❖ III – Problème ❖

Dans cet exercice, on se propose de démontrer par l'absurde que $\pi$ est irrationnel. On suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls $a$ et $b$ tels que

$$\pi = \frac{a}{b}.$$

**1.** Soient $n$, un entier naturel non nul, et $P$, un polynôme réel de degré $2n$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$, la dérivée $k$-ième de $P$. (On rappelle que $P^{(0)} = P$.)

On considère les applications $F$ et $G$ définies par

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x)$$
$$G(x) = F'(x) \sin x - F(x) \cos x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer $G'$ et en déduire que

$$\int_0^\pi P(x) \sin x \, dx = F(0) + F(\pi).$$

**2.** On suppose maintenant que le polynôme $P$ est défini par

$$P = \frac{1}{n!} X^n (a - bX)^n$$

où $n$ est un entier naturel non nul.

**2. a.** Calculer $P^{(j)}(0)$ pour tout entier $0 \leqslant j \leqslant 2n$. En déduire que $F(0)$ et $F(\pi)$ sont des entiers relatifs.

**2. b.** Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} \sin x \, dx$$

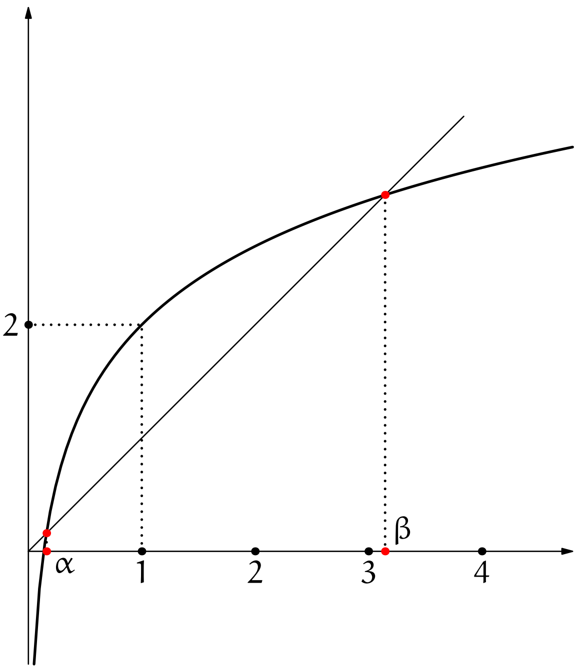
est un entier naturel non nul.

**2. c.** Démontrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $0$.

**2. d.** Conclure.

## Solution I ❁ Suite récurrente

**1.** On connaît le graphe de $\ell n$, il suffit de le translater verticalement.




**2.** L'application $g$ définie par

$$\forall\, x > 0, \quad g(x) = 2 + \ell n\, x - x$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $I = ]0, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

L'application $g$ est donc continue, strictement croissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

De plus, elle tend vers $-\infty$ au voisinage de $0$, prend la valeur $1 > 0$ en $x = 1$ et tend vers $-\infty$ au voisinage de $+\infty$ (par croissances comparées de $x$ et de $\ell n\, x$).

D'après le Théorème de la bijection, l'application $g$ réalise une bijection strictement croissante de $]0, 1]$ sur $]-\infty, 1]$ et une bijection strictement décroissante de $[1, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.

L'équation $g(x) = 0$ admet donc une, et une seule, solution $\alpha \in\, ]0, 1[$, ainsi qu'une, et une seule, solution $\beta \in\, ]1, +\infty[$, soit exactement deux solutions en tout.

**3. a.** L'application $\ell n$ est croissante, donc

$$\forall\, 1 \leqslant x \leqslant \beta, \quad 2 + \ell n\, 1 \leqslant 2 + \ell n\, x \leqslant 2 + \ell n\, \beta.$$

Or $\ell n\, 1 = 0$ et $g(\beta) = 0$ (par définition), donc

$$\forall\, 1 \leqslant x \leqslant \beta, \quad 1 \leqslant 2 \leqslant 2 + \ell n\, x \leqslant \beta.$$

**3. b.** D'après l'encadrement précédent, le segment $[1, \beta]$ est stable par $f$, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>bien définie</u> et bornée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant x_n \leqslant \beta.$$

En particulier, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\beta$.

☙ D'après **2.**, l'application $g$ est positive sur $[1, \beta]$, donc

$$\forall\, 1 \leqslant x \leqslant \beta, \quad f(x) \geqslant x$$

et comme $x_n \in [1, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n) \geqslant x_n,$$

c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

**3. c.** D'après la question précédente, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (croissante et majorée) et sa limite $\ell$ appartient au segment $[1, \beta]$.

Comme la fonction $f$ est continue sur $[1, \beta]$, on sait que la limite $\ell$ est un point fixe de $f$ sur $[1, \beta]$, c'est-à-dire un zéro de $g$. Or, d'après **2.**, l'application $g$ admet $\beta$ pour unique point fixe sur $[1, \beta]$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta$.

**4.** Avec le même raisonnement qu'au **3.a.**,

$$\forall\, x \geqslant \beta, \quad f(x) \geqslant \beta,$$

donc l'intervalle $[\beta, +\infty[$ est stable par $f$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et minorée par $\beta$.

D'après **2.**, l'application $g$ est négative sur $[\beta, +\infty[$, donc

$$\forall\, x \geqslant \beta, \quad f(x) \leqslant x$$

et en particulier

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = f(y_n) \geqslant y_n.$$

Autrement dit : la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par $\beta$, elle converge vers une limite supérieure à $\beta$.

Pour les mêmes raisons qu'au **3.c.**, cette limite est un point fixe de $f$ et et donc égale à $\beta$.

REMARQUE.— Même si l'énoncé ne le demande pas, il est intéressant de raisonner sur une figure pour se faire une opinion sur le comportement de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**5. a.** Comme $e < 3$,

$$g(3) = 2 + \ell n\, 3 - 3 = \ell n\, 3 - 1 > 0$$

et comme $\ell n\, 2 < 1$ (puisque $2 < e$),

$$g(4) = 2 + \ell n\, 4 - 4 = 2(\ell n\, 2 - 1) < 0.$$

D'après **2.**, on a donc

$$3 < \beta < 4.$$

**5. b.** **Admettons** que $x_n < \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\frac{x_{n+1} - \beta}{x_n - \beta} = \frac{f(x_n) - f(\beta)}{x_n - \beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(\beta) = \frac{1}{\beta}.$$

Comme $\beta > 3$, on en déduit que, à partir d'un certain rang $N_0$,

$$0 < x_{n+1} - \beta < \frac{1}{3}(x_n - \beta).$$

Une récurrence immédiate montre alors que

$$x_n - \beta \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(1/3^n\right)$$

c'est-à-dire
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \beta + o(\theta^n)$$
avec $\theta = 1/3$.

❧ **Et si jamais** il existait un rang $n_1$ tel que $x_{n_1} = \beta$ ? Dans ce cas, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait *stationnaire* :
$$\forall\, n \geqslant n_1, \quad x_n = \beta$$
et la propriété cherchée serait vraie *pour tout* $0 < \theta < 1$.

REMARQUE.— On peut vérifier que cette hypothèse n'est vérifiée que si $\alpha = \beta$, en reprenant avec soin l'étude du **2.**

## Solution II ❁ Chaîne de Markov

### Partie A. Étude d'un endomorphisme

**1.** Comme $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une **base** de $\mathbb{R}^3$, quelle que soit la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$, il existe un, et un seul, endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 3, \qquad f(e_k) = \varepsilon_k.$$

**2.** Les **colonnes** de $M$ décrivent les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base $\mathscr{B}$.
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**3.** Les deux premières colonnes de $M$ ne sont pas proportionnelles, donc le rang de $f$ est *au moins* égal à 2. Les deux dernières colonnes de $M$ sont proportionnelles, donc le rang de $f$ est *au plus* égal à 2.

Le rang de $f$ est donc égal à 2, son noyau est une droite vectorielle (Théorème du rang) et comme les deux dernières colonnes de $M$ sont égales,
$$\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}\cdot(e_2 - e_3) = \mathbb{R}\cdot(0, 1, -1).$$

❧ D'après **2.**,
$$3M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
On remarque cette fois que les colonnes de la matrice vérifient
$$2C_1 + C_2 + C_3 = 0$$
et un raisonnement analogue au précédent nous donne
$$\operatorname{Ker}(3f - 2I) = \mathbb{R}\cdot(2, 1, 1).$$

❧ De même,
$$M + I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
L'opération
$$C_1 \leftarrow 3C_1 - C_2 - C_3$$
nous donne la matrice
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
qui est clairement inversible. Donc la matrice $M + I_3$ est inversible et le noyau de $(f + I)$ est réduit au vecteur nul.

❧ De même,
$$3M + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Les colonnes de cette matrice vérifient
$$2C_1 - C_2 - C_3 = 0$$
donc $\operatorname{Ker}(3f + 2I) = \mathbb{R}\cdot(2, -1, -1)$.

**4. a.** L'opération $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ transforme $P$ en
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles (le rang est au moins égal à 2) et la première colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux autres (le rang est strictement supérieur à 2), donc la matrice $P$ est inversible.

VARIANTE POUR $5/2$ : les colonnes de $P$ représentent des vecteurs propres de $f$ pour des valeurs propres deux à deux distinctes ($0$, $2/3$ et $-2/3$), donc elles forment une famille libre et comme $P$ est une matrice carrée, elle est bien inversible.

**4. b.** D'après l'énoncé, la matrice $D$ vérifie
$$D = P^{-1}MP.$$
On reconnaît ici la formule de changement de base : comme $P$ est inversible, il existe une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que $P$ soit la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ et la matrice $D$ représente alors l'endomorphisme $f$ dans la base $\mathscr{C}$.

D'après la matrice $P$,
$$\varepsilon_1 = (2, 1, 1), \quad \varepsilon_2 = (-2, 1, 1), \quad \varepsilon_3 = (0, 1, -1).$$
D'après **3.**, on a
$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1) &= 2/3\cdot\varepsilon_1 = 2/3\cdot\varepsilon_1 + 0\cdot\varepsilon_2 + 0\cdot\varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_2) &= -2/3\cdot\varepsilon_2 = 0\cdot\varepsilon_1 - 2/3\cdot\varepsilon_2 + 0\cdot\varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_3) &= 0 = 0\cdot\varepsilon_1 + 0\cdot\varepsilon_2 + 0\cdot\varepsilon_3 \end{aligned}$$
et par conséquent
$$D = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**4. c.** Il suffit de calculer le produit $PQ$ et de constater qu'il est égal à $I_3$.

REMARQUE.— Il est important de *vraiment* calculer ce produit — un professeur distrait ou taquin pourrait avoir plus ou moins volontairement introduit une erreur de signe dans les coefficients de $Q$...

**4. d.** Pour $k = 0$, la propriété est évidente :
$$M^0 = I_3 \quad\text{et}\quad PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3.$$

On suppose **[HR]** qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$M^k = PD^kP^{-1}.$$

D'après **[HR]** et **4.b.**

$$\begin{aligned} M^{k+1} = M^kM &= (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD^kI_3DP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k = PD^kP^{-1}.$$

**4. e.** Comme D est diagonale,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad D^k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \mathrm{Diag}(1, (-1)^k, 0).$$

On en déduit que

$$PD^k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 2 & 2.(-1)^{k+1} & 0 \\ 1 & (-1)^k & 0 \\ 1 & (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

La première colonne de $M^k$ est obtenue en multipliant $M^k$ par $E_1$ (le premier vecteur de la base canonique), donc en multipliant $PD^k$ par la première colonne de $P^{-1}$ :

$$M^kE_1 = (PD^kP^{-1})E_1 = (PD^k)(P^{-1}E_1).$$

On trouve

$$(PD^k)\left(\frac{1}{4}QE_1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 2[1+(-1)^k] \\ 1-(-1)^k \\ 1-(-1)^k \end{pmatrix}.$$

Il est sage (même si ce n'est pas demandé) de présenter le résultat en discutant sur la parité de k.

Si k est pair, alors la première colonne de $M^k$ est égale à

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et si k est impair, alors la première colonne de $M^k$ est égale à

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

## Partie B. Étude d'un processus aléatoire

**5.** La loi de $X_1$ est une loi de probabilité sur $\{1, 2, 3\}$ (= l'ensemble des valeurs possibles). L'énoncé ne fournissant aucune information qui s'y oppose, **il est raisonnable de supposer** que la loi de $X_1$ est la loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 3) = \frac{1}{3}.$$

**6.** Comme $X_k$ est une **variable aléatoire** sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, alors

$$\big([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3]\big)$$

est un système complet d'événements (famille d'événements deux à deux disjoints dont l'union est égale à l'univers $\Omega$).

**7. a.** Pour que les probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j)$$

aient un sens, nous allons **supposer** que

$$\mathbf{P}(X_k = 1) > 0,\ \mathbf{P}(X_k = 2) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_k = 3) > 0.$$

❧ D'après l'énoncé, si $X_k$ a pris la valeur 1, alors $X_{k+1}$ prend la valeur de la boule tirée ensuite. Sans précision supplémentaire, on peut supposer que les trois valeurs possibles pour $X_{k+1}$ sont alors équiprobables et on **convient** donc de

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1) &= \mathbf{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 1) \\ &= \mathbf{P}(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

❧ Si $X_k$ a pris une valeur $j \neq 1$, il y a une chance sur trois pour que la boule numérotée j apparaisse au tirage suivant et deux chances sur trois pour que ce soit une autre boule (toujours selon notre hypothèse d'équiprobabilité).

Donc on **convient** de ce qui suit : pour $j = 2$,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 2) = 2/3 && \text{(autre boule)} \\ &\mathbf{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 2) = 1/3 && \text{(boule 2)} \\ &\mathbf{P}(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 2) = 0 \end{aligned}$$

et pour $j = 3$,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 3) = 2/3 && \text{(autre boule)} \\ &\mathbf{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 3) = 0 \\ &\mathbf{P}(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 3) = 1/3. && \text{(boule 3)} \end{aligned}$$

**7. b.** Comme on connaît un système complet d'événements, pour tout $1 \leqslant i \leqslant 3$,

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}([X_{k+1} = i] \cap [X_k = j])$$

et on retrouve ainsi la Formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j)\,\mathbf{P}(X_k = j).$$

(Si $\mathbf{P}(X_k = j) = 0$, alors $\mathbf{P}([X_{k+1} = i] \cap [X_k = j]) = 0$ et le fait que la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j)$ ne soit pas définie est alors sans importance.)

On cherche ici une matrice $A = (a_{i,j})$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad \mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\,\mathbf{P}(X_k = j).$$

D'après la Formule des probabilités totales et **7.a.**, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

convient. On remarque alors que

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M + \frac{1}{3}I_3.$$

REMARQUE.— Il vaut mieux ne pas laisser croire que cette matrice est la seule possible : ce n'est pas demandé par l'énoncé et ce n'est pas simple à établir...

**8. a.** D'après **7.b.**, il est clair que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad U_k = A^{k-1}U_1$$

et d'après **5.**,

$$U_1 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad U_k = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

❧ On a remarqué plus haut que

$$A = M + \frac{1}{3}I_3.$$

On déduit de **4.b.** que

$$P^{-1}AP = P^{-1}MP + \frac{1}{3}I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

et donc que

$$A^k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Un calcul analogue à celui du **4.e.** nous donne alors

$$A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\left[1 + (-1/3)^k\right] \\ 1 - (-1/3)^k \\ 1 - (-1/3)^k \end{pmatrix}$$

cqfd.

**8. b.** On en déduit immédiatement que

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(X_k = 1) = 1/2,$$
$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(X_k = 2) = 1/4,$$
$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(X_k = 3) = 1/4.$$

**9.** Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ étaient indépendantes, alors en particulier $X_1$ et $X_2$ seraient indépendantes et dans ce cas,

$$\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 1).$$

Or $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = 1/3$ par **7.a.** et

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}(1 + 1/9) = 5/9$$

par **8.a.**

Donc les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ ne sont pas indépendantes et, a fortiori, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas indépendantes.

**Partie C. Simulation informatique**

**10.** On importe la fonction `random_integers` du module `numpy.random` et on l'utilise en suivant les indications de la documentation.

```
from numpy.random import random_integers as rd

def tirages(N):
  T = rd(3, size=N)
  return T
```

**11.**

```
def processus(T):
  N = len(T)
  X = []
  X.append(T[0])     # Première boule tirée
  for k in range(N-1):
    # T_{k+1} = (k+1)-ième boule tirée
    t = T[k+1]
    if (X[k]==1):    # si X_k = 1
      X.append(t)    # alors X_{k+1} = T_{k+1}
    else:
      j = X[k]       # si X_k = j ≠ 1
      if (t==j):     # et si T_{k+1} = j,
        X.append(j)  # alors X_{k+1} = j
      else:          # mais si T_{k+1} ≠ j,
        X.append(1)  # alors X_{k+1} = 1
  return X
```

## Solution III ❁ Irrationnalité de $\pi$

**1.** On obtient facilement :

$$\begin{aligned} G'(x) &= (F''(x) + F(x)) \sin x \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k+2)}(x) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x)\right) \sin x \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} P^{(2k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x)\right) \sin x \\ &= \Big((-1)^n \underbrace{P^{(2n+2)}(x)}_{\substack{=0 \\ \text{car deg } P = 2n}} + P(x)\Big) \sin x \\ &= P(x) \sin x. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^\pi P(x)\ \sin x\, dx = G(\pi) - G(0) = F(0) + F(\pi).$$

**2. a.** En développant par la formule du binôme et en posant $j = k + n$ :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{n!}\, X^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(-b)^k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a^{n-k}b^k}{k!(n-k)!}\, X^{k+n} \\ &= \sum_{j=n}^{2n} (-1)^{j-n} \frac{a^{2n-j}b^{j-n}}{(j-n)!(2n-j)!} X^j \end{aligned}$$

et donc (selon la Formule de Taylor pour les polynômes) :
– si $0 \leqslant j \leqslant n-1$, alors

$$P^{(j)}(0) = 0$$

– et si $n \leqslant j \leqslant 2n$, alors

$$\begin{aligned} P^{(j)}(0) &= (-1)^{j-n} \frac{j!}{(j-n)!(2n-j)!} a^{2n-j}b^{j-n} \\ &= (-1)^{j-n} \underbrace{\binom{n}{j-n}}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{\frac{j!}{n!}}_{\in\mathbb{Z}} a^{2n-j}b^{j-n}. \end{aligned}$$

On en déduit que les $P^{(j)}(0)$ sont des entiers relatifs, puis que

$$F(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(0)$$

est également un entier relatif.

❧ Comme

$$P\Big(\frac{a}{b} - X\Big) = \frac{1}{n!}\Big(\frac{a}{b} - X\Big)^n (bX)^n = P(X),$$

on en déduit que

$$P^{(j)}(\pi) = P^{(j)}(a/b) = (-1)^j P^{(j)}(0)$$

est également entier relatif pour tout $j \in \{0, \dots, 2n\}$, puis que $F(\pi)$ est élément de $\mathbb{Z}$.

**2. b.** Pour tout $n \geqslant 1$, $I_n$ est donc un entier relatif (car $I_n = F(0) + F(\pi)$) strictement positif (car la fonction $[x \mapsto P(x)\sin x]$ est strictement positive sur $]0, \pi[$).

**2. c.** Pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$0 \leqslant \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \sin x \leqslant \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

(cette majoration, *très grossière*, suffit pour conclure) donc

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

**2. d.** Comme les $I_n$ sont des entiers strictement positifs, on a $1 \leqslant I_n$ pour tout $n$, ce qui contredit la convergence de $(I_n)_{n\geqslant 1}$ vers 0 établie à la question précédente.

L'hypothèse $\pi \in \mathbb{Q}$ est absurde et $\pi$ est donc irrationnel.