❧ Comme $0 < 1/3 < 1/2$, il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant (1/2)^n$$

et comme $0 < 1/2 < 1$, la série géométrique $\sum (1/2)^n$ est convergente.

D'après le Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif, la série $\sum u_n$ est donc absolument convergente.

❧ Lorsque $n = 2p$ est un indice pair,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = \frac{3^{-(2p+1)}}{2^{-(2p)}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et lorsque $n = 2p+1$ est un indice impair,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = \frac{2^{-(2p+2)}}{3^{-(2p+1)}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Le quotient u_{n+1}/u_n alterne donc entre des valeurs proches de zéro (lorsque n est pair) et des valeurs infiniment grandes (lorsque n est impair), donc ce quotient **n'a pas de limite** et on ne peut donc pas appliquer la règle de D'Alembert.