464. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $\mathbf{E}(X^2) = 1$ et que $\mathbf{E}(X) \geqslant a$. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer que $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda a) \geqslant (1-\lambda)^2 a^2$.

465. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul à coefficients positifs ou nuls. On pose $f : x \mapsto \exp(P(x))$.
a) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon de convergence $+\infty$.
On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
b) Montrer que les b_n sont positifs ou nuls.
Pour $x > 0$, soit X_x la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathbf{P}(X_x = n) = \dfrac{b_n x^n}{f(x)}$.
c) Soit $x > 0$. Exprimer $\mathbf{E}(X_x)$ et $\mathbf{V}(X_x)$ à l'aide de P.
Soit $d \in \mathbb{R}^+$ tel que $2d > \deg(P)$. On pose, pour $x > 0$, $I_x = \{n \in \mathbb{N},\ |n - xP'(x)| \geqslant x^d\}$.
Soit $g_d : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \sum_{n \in I_x} b_n x^n$. Montrer que $g_d(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$.

Mines-Ponts - MP

Algèbre

466. $^\diamond$ ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Caractériser et dénombrer les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$.
b) Soient $x \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner deux algorithmes du calcul de l'inverse de x modulo 2^n, le premier utilisant la suite $(\overline{x}^{2^k})_{k\geqslant 0}$, où $\overline{x}$ désigne la classe de x modulo 2^n, le second résolvant successivement, pour $k = 1, \ldots, n$, la congruence $y_k x \equiv 1\ [2^k]$.

467. $^\diamond$ Soit p un nombre premier impair.
a) Dénombrer les carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
b) On suppose $p \equiv 1\ [4]$. En calculant la classe de $(p-1)!$ modulo p de deux manières différentes, montrer que -1 est un carré modulo p.
c) On suppose que -1 est un carré modulo p. Montrer que $p \equiv 1\ [4]$.

468. $^\diamond$ ***a)*** Soit φ un isomorphisme du groupe G sur le groupe H. Montrer que x est générateur de G si et seulement si $\varphi(x)$ est générateur de H.
b) Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

469. $^\diamond$ Soit $n \geqslant 2$ un entier, γ un n-cycle de $\mathcal{S}_n$. Écrire γ comme produit de transpositions.

470. $^\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les morphismes de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

471. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $G \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$. Montrer que G est cyclique.

472. $^\diamond$ Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes deux à deux distincts, $P = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$.
Calculer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{P''}{P'}(z_k)$.

473. $^\diamond$ ***a)*** Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$\forall \theta \in]0, \pi/2[,\ P_n(1/\tan^2\theta) = \dfrac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}$.
b) Préciser le degré et les racines de P_n. Étudier la somme des racines.
c) Montrer que pour $\theta \in]0, \pi/2[$, $\dfrac{1}{\tan^2\theta} \leqslant \dfrac{1}{\theta^2} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta}$.
d) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

474. $^\diamond$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$.

475. $^\diamond$ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.
a) Décomposer $\dfrac{P'}{P}$ en éléments simples et montrer que toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.
b) Soient a et b deux nombres complexes, $c \in [a,b]$, A l'ensemble des racines de $P - a$, B l'ensemble des racines de $P - b$, C l'ensemble des racines de $P - c$. Montrer que C est contenu dans l'enveloppe convexe de $A \cup B$.

476. $^\diamond$ ***a)*** Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
b) Déterminer les $F \in \mathbb{C}(X)$ tels que $F(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

477. $^\diamond$ Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, E une partie finie de $\mathbb{C}$.
a) Montrer que $|P^{-1}(E)| \leqslant n|E|$.
b) Quel est le degré de $P \wedge P'$?
c) Montrer que $|P^{-1}(E)| \geqslant (|E|-1)n + 1$.

478. $^\diamond$ Soient $a_1 < \cdots < a_n$ des entiers relatifs, $P = 1 + \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^2$. Montrer que P est un irréductible de $\mathbb{Z}[X]$.

479. $^\diamond$ Quelle est la dimension du $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{U}_5$?

480. $^\diamond$ Que dire d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie qui stabilise toute droite vectorielle ?

481. $^\diamond$ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$.

a) Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leqslant n$.
b) Montrer que $2\,\mathrm{rg}(u^2) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.

482. $^\diamond$ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E. On suppose que f est inversible et g de rang 1. Montrer que $f+g$ est inversible si et seulement si $\mathrm{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

483. $^\diamond$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps, f une application non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $f(AB) = f(A)\,f(B)$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.

484. $^\diamond$ Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
Montrer que $p + \mathrm{rg}(I_n + AB) = n + \mathrm{rg}(I_p + BA)$.

485. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les équations :
$X + {}^tX = \mathrm{tr}(X)A$, $X + {}^tX = \mathrm{tr}(XB)A$, $X - {}^tX = \mathrm{tr}(X)A$.

486. $^\diamond$ Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est de trace nulle si et seulement si elle est semblable à une matrice à diagonale nulle.

487. $^\diamond$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ et $A = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que A est inversible, calculer A^{-1}. On pourra considérer $\overline{A}A$ et A^2.

488. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent à toutes les matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

489. $^\diamond$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \left(\alpha^{|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. La matrice A est-elle dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? Le cas échéant, calculer son inverse.

490. $^\diamond$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ AMB = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en calculer la dimension.

491. $^\diamond$ Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$.
a) On suppose que $\mathrm{Vect}(u, v)$ possède un élément inversible.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0\}$.
b) Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.
c) Montrer que, si u et v commutent, la réciproque de la question ***a)*** est vraie.

492. $^\diamond$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que le rang de B est 1. Comparer $\det(A+B)\det(A-B)$ et $\det(A^2)$.

493. $^\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \mathrm{Com}(M)$.

494. $^\diamond$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $(AB)^n = 0$. Montrer que $(BA)^n = 0$.

495. $^\diamond$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

496. $\star$ $^\diamond$ ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall (A, t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$, $\det(A^2 + tI_n) \geqslant 0$.
b) On suppose $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

497. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$, soit $f(P) = (X^2-1)P' - 2nXP$. Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ et déterminer ses éléments propres.

498. Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f^2 soit un projecteur.
a) Montrer que f est trigonalisable.
b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

499. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$, $C'(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \forall M \in C(A),\ MX = XM\}$.
a) Quelle est la dimension de $C(A)$? A-t-on $C(A) = \mathbb{R}[A]$?
b) Quelle est la dimension de $C'(A)$? Comparer $C'(A)$ et $\mathbb{R}[A]$.

500. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que B soit diagonalisable et $AB^3 = B^3A$. Montrer que $AB = BA$. Proposer une généralisation.

501. ***a)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $P(M) = A$.
b) Donner un exemple montrant que le résultat précédent ne se généralise pas au cas où A n'est pas diagonalisable.

502. Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que M et M^2 soient semblables.

503. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
b) Déterminer les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

504. Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $M = \begin{pmatrix} a & -a & -1 & 0 \\ a & -a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & a & -a \end{pmatrix}$.
a) Déterminer le polynôme minimal de M.
b) Résoudre l'équation $X^2 = M$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$.

505. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On suppose que $AN = NA$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A + N$.

506. ⋆ Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

507. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que B soit diagonalisable.

508. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = (\delta_{i,n+1-j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $A_n = \begin{pmatrix} I_n & J_n \\ J_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Diagonaliser A_n.

509. ⋆ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ tels que $AX - XB = C$.

510. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer le spectre de la comatrice de A.

511. Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Montrer que dans chacun des trois cas suivants, u et v admettent un vecteur propre commun.
i) $uv = 0$; ***ii)*** $uv \in \mathrm{Vect}(u)$; ***iii)*** $uv \in \mathrm{Vect}(u, v)$.

512. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant même polynôme minimal et même polynôme caractéristique. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

513. ***a)*** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ telle que $f^3 + f = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, que dire de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $f^3 + f = 0$?

514. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^5 - 2A^4 - 2A^3 + A^2 + 4A + 4I_n = 0$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = \pm 1$.

515. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ A^3 + A = 10\, I_n\}$. Déterminer l'image de E_n par det.

516. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$ dont les seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$ et E. Montrer que $n = 2$.

517. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Calculer e^A si $A^3 = A^2$.
b) Calculer e^A si $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$.

518. Soient $a \in]0, 1[$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & a \\ 1-a & a & 0 \end{pmatrix}$. Étudier la convergence de la suite $(A^n)_{n\geqslant 0}$.

519. ⋆ Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$, g une surjection continue croissante de $[0, 1]$ sur lui-même et Φ l'endomorphisme de E défini par $\forall f \in E$, $\Phi(f) = f \circ g$. Soit V un sous-espace de dimension finie de E stable par Φ. Montrer que Φ induit un automorphisme φ de V dont la seule valeur propre est 1. En déduire que $\varphi = \mathrm{id}_V$.

520. Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs non nuls de E. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, soit $f(x) = \dfrac{\langle x, a\rangle\ \langle x, b\rangle}{\|x\|^2}$. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de f.

521. Soient E un espace euclidien, $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Montrer que p est symétrique si et seulement si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

522. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel, $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2$. Montrer que $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

523. Soit E l'espace des fonctions continues f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\, e^{-t}\, dt$ converge.
a) Justifier qu'en posant $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-t}\, dt$, on définit un produit scalaire sur E.
b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $L_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale de degré n.
c) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.
d) Pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $e_a(x) = e^{-ax}$. Montrer que $\|e_a\|^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle L_n, e_a\rangle^2$.
e) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

524. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M = -{}^tM$ si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXMX = 0$.

525. Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.

526. Soient E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$.

527. ***a)*** Soit $n \geqslant 2$. Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour toute matrice antisymétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(A)$ soit antisymétrique.

b) Soit $n \geqslant 2$. Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(A)$ soit orthogonale.

528. Déterminer l'ensemble des couples (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tels qu'existe $M \in S_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{tr}(M) = a$ et $\det(M) = b$.

529. Soient $A_1, \dots, A_p \in S_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \{1,\dots,p\}, A_i \in \mathbb{R}[A]$.

530. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ à spectre imaginaire pur.

531. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+ \iff \forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXAX \geqslant 0$. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices vérifiant cette condition.
On suppose dans la suite que les coefficients $A_{i,j}$ de A sont non nuls et on pose
$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, B_{i,j} = \dfrac{1}{A_{i,j}}$.
b) Montrer que, si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rg}(A) = 1$, alors $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
c) Montrer que, si $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{rg}(A) = 1$.

532. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que si A s'écrit ST avec $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T \in S_n(\mathbb{R})$, A est diagonalisable.
b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = SAS^{-1}$.

533. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tAA = {}^tBB$ si et seulement s'il existe $K \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = KA$.

534. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, soit A_1 la matrice obtenue en ôtant à A sa première ligne et sa première colonne.
a) Montrer que, si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A_1 \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.
b) Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $\langle Ax, x\rangle\ \langle A^{-1}y, y\rangle \geqslant \langle x, y\rangle^2$.
c) Trouver $y \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$\forall A \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ \min\left\{\frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,y\rangle^2}\ ;\ x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x,y\rangle \neq 0\right\} = \frac{\det(A)}{\det(A_1)}.$$
d) Pour A et B dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ comparer $\dfrac{\det(A+B)}{\det(A_1+B_1)}$ et $\dfrac{\det(A)}{\det(A_1)} + \dfrac{\det(B)}{\det(B_1)}$.

535. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que ${}^t\overline{M}M = I_n$.
a) Soit $A \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ symétrique. En considérant les parties réelle et imaginaire de A, montrer que A s'écrit e^{iS} où $S \in S_n(\mathbb{R})$. Réciproque ?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si A s'écrit Oe^{iS} avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Analyse

536. Soient E l'espace des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
a) Pour $f \in E$, soit $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E, la comparer à $\|\ \|_\infty$.
b) Même question pour N' définie par $\forall f \in E,\ N(f') = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'|$.

537. Soit C une partie convexe d'un espace normé. Montrer que l'adhérence et l'intérieur de C sont convexes.

538. Soient (E,N) un espace normé réel, $B = \{x \in E\ ;\ N(x) < 1\}$. Montrer que E et B sont homéomorphes.

539. ★ Soient C une partie convexe d'un espace normé réel E, D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

540. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; en déterminer les composantes connexes par arcs.

541. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_k)_{k\geqslant 0}$ et $(B_k)_{k\geqslant 0}$ deux suites d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers A et B.
a) On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont semblables. Les matrices A et B sont-elles semblables ?
b) Que dire si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont orthogonalement semblables ?

542. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $S(f) = \{g \circ f \circ g^{-1}\ ;\ g \in \mathrm{GL}(E)\}$. Montrer que $S(f)$ est un fermé de $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si f est diagonalisable.

543. ★ ***a)*** Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que, pour $n = 2$ et $n = 3$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire pour n quelconque ?

544. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé réel, K un compact non vide de E, f une application de K dans K telle que $\forall (x,y) \in K^2,\ x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
a) Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on note x.
b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

545. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma(k)$.

546. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée telle que $a_{n+1} - a_n \to 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est un segment.

547. ◇ La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n+1})$.

a) On suppose que $(u_n)_{\geqslant 0}$ converge. Que dire de sa limite ?
b) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.
c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sup\{u_k\ ;\ k \geqslant n\}$ et $b_n = \inf\{b_k\ ;\ k \geqslant n\}$. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent.
d) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

548. $^\diamond$ Soient f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
a) Montrer que $u_n \to 0$.
b) Si f est dérivable en 0, que dire de $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

549. $^\diamond$ Étudier la convergence de la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1 - {u_n}^2}{1 + {u_n}^2}$.

550. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \dfrac{1 + u_n}{2 + u_n}$. Montrer que $u_n \to 0$; étudier le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

551. $^\diamond$ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + {u_n}^2$.
a) Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ selon la valeur de u_0.
b) On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 sans stationner. Trouver un équivalent de u_n.

552. La suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Déterminer un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

553. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $n(u_n + u_{2n}) \to 1$. Étudier la convergence de $(nu_n)_{n\geqslant 0}$.

554. $^\diamond$ Préciser deux réels a et b tels que $\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + an + b + o(1)$.

555. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{nx_n}{2n + 2^{n+1}x_n}$. Étudier le comportement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

556. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha}$.
a) On suppose que $\alpha > 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} R_k = (n+1)R_n + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^{\alpha-1}}$. En déduire la convergence de $\sum R_n$.
b) Étudier le cas $\alpha \leqslant 1$.

557. Dessiner le domaine de convergence dans $\mathbb{C}$ de $\sum \exp\left(\dfrac{nz}{z-2}\right)$.

558. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1/2\}$. La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^\alpha}$, $n \geqslant 2$, est-elle convergente ?

559. $^\diamond$ Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe périodique, $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. La série $\sum \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

560. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in {\mathbb{R}^{+*}}^{\mathbb{N}^*}$.
a) On suppose que $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge. Montrer que $\sum a_n$ converge.
b) On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge et majorer sa somme. On introduira, pour $\lambda > 1$, l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}^*\ ;\ a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \lambda a_n\right\}$ et son complémentaire.
c) Généraliser en remplaçant $a_n^{1-\frac{1}{n}}$ par $a_n^{1-b_n}$, avec une hypothèse adéquate sur la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$.

561. $^\diamond$ Soit f une fonction continue et croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
a) On suppose que $f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^n f$.
b) Le résultat de *a)* subsiste-t-il sans l'hypothèse $f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$?

562. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\ (2^n(\zeta(n) - 1) - 1)$.

563. $^\diamond$ *a)* Montrer qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor}$.
b) Nature de la série de terme général a_n^{-2} ?

564. $^\diamond$ Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.

565. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g(x) = x\,f(x)$ et $h(x) = f(1/x)$. Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si h l'est.

566. Soit f une fonction dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in [0,1]$, $(f(x), f'(x)) \neq (0,0)$. Montrer que l'ensemble des zéros de f est fini.

567. $^\diamond$ Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, E l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Pour $f \in E$, soit $\varphi(f) = \int_a^b f \times \int_a^b \dfrac{1}{f}$. Déterminer $\varphi(E)$.

568. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}^+) \ ; \ \forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|\}$.
Déterminer $\inf \left\{ \int_0^1 f, \ f \in E \right\}$.

569. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(nt)} \, dt$. Déterminer la limite de $(I_n)_{n \geqslant 0}$.

570. Soit $x \in \mathbb{R}$.
a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos(t) - \cos(x)} \, dt$.
b) Trouver une relation de récurrence d'ordre deux vérifiée par $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
c) Calculer I_n si $n \in \mathbb{N}$.

571. Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\int_0^x \big(1 + f(t)\big)^{1/n} \, dt = \frac{1}{n^p}$ admet une unique solution, que l'on note a_n.
b) On suppose que $f(0) \neq 0$. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n quand $n \to +\infty$.

572. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 2$. Quelle est la nature de $I = \int_0^{+\infty} \sin(P(x)) \, dx$? Quel est le signe de I lorsque $P = X^2$?

573. ★ Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2(x)} \, dx$.

574. Pour a et b dans $\mathbb{R}^{+*}$, existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \, dt$.

575. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha) \, dx$ est-elle convergente ?

576. Soient $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1+t}} \, dt$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Justifier l'existence de I et S, puis exprimer I en fonction de S.

577. On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n))$. Étudier f : monotonie, régularité, comportement asymptotique ; tracer son graphe.

578. *a)* Donner le domaine de définition de $S \ : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ et étudier sa continuité.
b) Déterminer limites et équivalents éventuels de $S(x)$ en 0^+ et en $+\infty$.

579. *a)* Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} e^{it^2} \, dt$.
b) Montrer que $\int_x^{+\infty} e^{it^2} \, dt \underset{x \to +\infty}{=} \frac{ie^{ix^2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

580. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n \, dx$.
a) Donner le rayon de convergence R de $\sum I_n x^n$.
b) Étudier la convergence de $\sum I_n x^n$ pour $x = R$ et $x = -R$.
c) Pour $x \in]-R, R[$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$.

581. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
a) Convergence et somme de $\sum a_n$.
b) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ et étudier la somme lorsque x tend vers R^-.

582. Si $(u_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on dit que $\sum u_n$ converge au sens d'Abel si $\sum u_n x^n$ a une limite finie lorsque $x \to 1^-$; cette limite est la somme au sens d'Abel de la série.
a) On suppose $(u_n)_{n \geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si elle converge au sens d'Abel ; comparer alors les deux sommes.
b) Montrer qu'une série convergente est convergente au sens d'Abel, et que sa somme au sens d'Abel est alors égale à sa somme ordinaire.
c) Étudier la convergence au sens d'Abel de $\sum u_n$ si $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = (-1)^n (n+1)$.

583. Soit $t \in \mathbb{R}$.
a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} x^n$.
b) Étudier la convergence pour $x \in \{\pm 1\}$.
c) Calculer la somme pour $x \in]-1, 1[$.

584. *a)* Donner le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n}$.

585. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et, pour $x \in]-1, 1[$, $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$.
a) Montrer par deux méthodes que f_α est développable en série entière, préciser le développement.

b) On note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ce développement. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $|a_n| \sim \frac{c}{n^{\alpha+1}}$.

c) La série $\sum a_n$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?

586. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière à coefficients complexes de rayon de convergence 1. Pour $x \in]-1, 1[$, soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Montrer que, si $\sum a_n$ converge, f a une limite finie en 1^-.

b) On suppose que f a une limite finie en 1^-. Est-il vrai que $\sum a_n$ converge ?

587. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.

b) Étudier la convergence de la série en $\pm R$.

c) Donner un équivalent de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ lorsque x tend vers R^-.

588. Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leqslant A|z|^d + B$. Montrer que f est polynomiale.

589. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+|x|} f(x-n)\,dx$. Étudier la convergence de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

590. *a)* Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n\,dx$.

b) Montrer qu'il n'existe pas de partie I de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n\in I} \frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$.

591. Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$. Étudier F puis calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2}\,dt$.

592. Domaine de définition, continuité et équivalents aux bornes de $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^x}}$.

593. Domaine de définition et calcul de $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\,dt$.

594. On fixe $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

a) Soit, pour $b \in \mathbb{R}$, $F(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(2bx)\,dx$. Trouver une équation différentielle vérifiée par F et déterminer F.

b) Pour $b \in \mathbb{R}$, soit $G(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \sin(2bx)\,dx$. Montrer que $G(b) = \frac{1}{a}\, e^{-\frac{b^2}{a}} \int_0^b e^{\frac{x^2}{a}}\,dx$.

c) Trouver la limite de $G(b)$ puis celle de $bG(b)$ en $+\infty$.

595. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t))\,dt$.

a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $xy'' + y' + xy = 0$.

b) Montrer par deux méthodes différentes que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer le développement.

596. *a)* Soit (E) l'équation différentielle $xy'' + y' - xy - 1 = 0$. Trouver les solutions de (E) développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $x \mapsto \int_0^{\pi/2} e^{-x\sin(t)}\,dt$ est solution de (E).

c) En déduire $\int_0^{\pi/2} \sin(t)^n\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

597. Étudier $x \mapsto \int_x^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos(x) - \cos(t)}}$.

598. Expliquer la méthode de variation de la constante pour une équation linéaire non homogène du second ordre.

599. Soit (E) l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ y'' - y = |\cos(x)|$. Existe-t-il des solutions positives ? bornées ? positives et bornées ?

600. Soient u une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, f une solution de l'équation différentielle $y'' + (1+u)y = 0$. Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)\,dt$.

a) Former une équation différentielle linéaire vérifiée par g.

b) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leqslant c + \int_0^x |u(t)f(t)|\,dt$.

c) Montrer que f est bornée.

601. Soit q une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, (E) l'équation différentielle $y'' + qy = 0$.

a) Montrer que, si y est une solution bornée de (E), alors $y'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Montrer que (E) admet des solutions non bornées.

602. Soit q une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, y une fonction de classe C^2 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que $y'' + qy = 0$. Montrer que l'ensemble des zéros de y est fini.

603. Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, a et b deux fonctions continues et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les solutions T-périodiques de $x' = ax + b$.

604. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction M de $\mathbb{R}$ dans $S_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $M(0) = I_n$ et que $\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = SM(t)S$. La fonction M est-elle bornée ?

605. Soient a et b deux fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, E l'espace des solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $y \in E \setminus \{0\}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, y(t+1) = \lambda y(t)$.

606. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $T \in \mathbb{R}^{+*}$, E l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $U \in E$, on note $Y_{Y_0,U}$ l'unique solution du problème de Cauchy $Y(0) = Y_0$, $\forall t \in [0,T], Y'(t) = AY(t) + BU(t)$.
a) Montrer que, si $t \in [0,T]$, il existe $\varphi_t \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ tel que :
$\forall (Y_0, U) \in E \times \mathbb{R}^n,\ Y_{Y_0,U}(t) = e^{tA}Y_0 + \varphi_t(U)$.
b) Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes
i) $\forall Y_1 \in \mathbb{R}^n, \exists U \in E,\ \varphi_T(U) = Y_1$;
ii) $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n, \exists U \in E,\ Y_{Y_0,U}(T) = 0$;
iii) l'image de φ_T est dense dans $\mathbb{R}^n$.

607. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $[A,B] = AB - BA$, on suppose que A et B commutent avec $[A,B]$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $f(t) = e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$.
a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $A^kB - BA^k = kA^{k-1}[A,B]$.
b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
c) Montrer que $e^{A+B} = e^Ae^Be^{-\frac{[A,B]}{2}}$.

608. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x(1-y)$ si $x \leqslant y$, $f(x,y) = y(1-x)$ sinon. Étudier la continuité et la différentiabilité de f.

609. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Déterminer les fonctions différentiables f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que $a\dfrac{\partial f}{\partial x} + b\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

610. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ f(tx) = t^\lambda f(x)$.
a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lambda f(x)$.
b) La réciproque de la propriété précédente est-elle exacte ?

611. Étudier les extrema de $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n}$.

612. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $f \in S^{++}(E)$, $u \in E$.
Pour $x \in E$, soit $F(x) = \dfrac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$.
a) Montrer que F est de classe C^1, calculer sa différentielle.
b) Montrer que F atteint son minimum sur E en un point que l'on précisera.

613. Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\Delta f = 0$.
On pose $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
a) Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et que $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)(r,\theta) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0$ pour $r \in \mathbb{R}^{+*}, \theta \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que $r \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,d\theta$ est constante.

614. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :
- il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax + b$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne de f en x est antisymétrique.

On considèrera, pour $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$, $f_{i,j,k} = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}$.

615. Soient E un espace euclidien, S sa sphère unité, f une fonction différentiable sur un voisinage de S, à valeurs réelles. On suppose que la restriction de f à S admet un extremum local en x_0.
a) Que dire de $\nabla f(x_0)$?
b) Soit u un endomorphisme symétrique de E. Appliquer ce qui précède à $f\ :\ x \mapsto \langle u(x), x\rangle$ et en déduire une démonstration du théorème spectral.

Probabilités

616. ◇ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$. Déterminer $\mathbf{P}(A \subset B)$.

617. ◇ ***a)*** Soit E un ensemble de cardinal n. Combien y a-t-il de couples de parties (X,Y) telles que $X \subset Y$?
b) Une urne est remplie de boules numérotées de 1 à n. On prend une poignée de boules (entre 0 et n boules), puis on les remet et on prend une deuxième poignée. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune boule en commun dans les deux poignées ?

618. ★ On considère une urne contenant a boules blanches et b boules rouges. Après chaque tirage, on remet c boules de la couleur tirée dans l'urne. On effectue n tirages et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges tirées.
a) Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
b) On considère Y la variable aléatoire donnant le numéro du premier tirage pour lequel on tire une boule rouge. Montrer que Y admet une espérance et calculer la loi de Y.

619. ◇ ***a)*** Soient p et q dans $\mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.

b) Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On retire les boules une à une et on note X le nombre de tirages nécessaire pour retirer toutes les boules blanches. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{\binom{n-1}{b-1}}{\binom{r+b}{b}}$.
c) Caculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

620. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2N$ boules blanches et N noires. On effectue des tirages avec remise et on note X le nombre de tirages nécessaires pour avoir deux boules blanches consécutives. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \mathbf{P}(X \geqslant n)$.
a) Trouver une relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
b) Déterminer la loi de X.
c) Montrer que X possède un moment à tout ordre.
d) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

621. $^\diamond$ Soient $n, p, b \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n + b$. Une urne contient n boules noires et b boules blanches; on tire simultanément p boules. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches tirées. Déterminer l'image, la loi, l'espérance et la variance de X.

622. $^\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour un tournoi de football, n équipes de D_1 et n équipes de D_2 sont rassemblées et n matchs sont organisés successivement. Pour chaque match, les équipes qui s'affrontent sont choisies en toute indépendance et équiprobabilité.
a) Déterminer la probabilité a_n pour que chaque équipe de D_1 rencontre une équipe de D_2.
b) Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

623. $^\diamond$ Une variable aléatoire réelle X vérifie $\mathcal{P}$ si $\mathbf{E}(|X|^3) < +\infty$ et si $\mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^3) = 0$. Pour quelles valeurs de $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$ vérifie-t-elle $\mathcal{P}$?

624. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose qu'il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$. Que dire de Y ?

625. Soient $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = pq^k$.
a) Calculer $\mathbf{E}(X), \mathbf{V}(X)$.
b) Déterminer la loi de $D = |X - Y|$.
c) Soit $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi du couple (D, Z)

626. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Si $1 \leqslant k \leqslant n$, calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right)$.

627. $^\diamond$ On considère n expériences indépendantes ayant les probabilités de réussite respectives $p_1, \dots, p_n$. On note N le nombre d'expériences ayant réussi.
a) Déterminer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.
b) On fixe $m \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n > m$. Quel est le maximum de $\mathbf{V}(N)$ sous la contrainte $\mathbf{E}(N) = m$?

628. $^\diamond$ Peut-on piper deux dés de sorte que, les lancers étant supposés indépendants, leur somme suive la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

629. * Soient $p \in]0, 1[$, $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p. On pose $L_1 = \max\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ X_1 = X_2 = \cdots = X_k\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon.
a) Montrer que L_1 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.
b) Si $L_1 < +\infty$, soit $L_2 = \max\{\ell \in \mathbb{N}^* \ ; \ X_{L_1+1} = X_{L_1+2} = \cdots = X_{L_1+\ell}\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon. Montrer que L_2 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.

630. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant toutes la même loi. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit R_n le cardinal de $\{X_k \ ; \ 1 \leqslant k \leqslant n\}$.
a) Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(R_n) \leqslant a + n\,\mathbf{P}(X_1 \geqslant a)$.
b) Montrer que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$.
c) On suppose $\mathbf{E}(X) < +\infty$. Montrer que $\mathbf{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$.

Mines-Ponts - PSI

Algèbre

631. $^\diamond$ Soit (E) l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}_n[X]$ définie par $P(\cos x) = \cos(P(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
a) Trouver les solutions de (E) de degré 0.
b) Trouver les solutions de (E) de degré 1.
c) Résoudre (E).

632. *a)* Montrer que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = n(n + 1)/2$.
b) Est-ce que l'ensemble des matrices nilpotentes est un espace vectoriel ?
c) Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composé de matrices nilpotentes.
Montrer que $\dim \mathcal{N} \leqslant n(n - 1)/2$.
d) Peut-on avoir $\dim \mathcal{N} = n(n - 1)/2$?

633. $^\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant k \leqslant n$ et $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij}^{(k)} = 1$ si $i - j = k - 1$, les autres coefficients étant nuls.
a) Calculer ${}^tA_k A_k$.
Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $p \neq \mathrm{id}$.
b) Démontrer que le rang de p est strictement inférieur à n.
c) Démontrer que p est la composée de deux endomorphismes nilpotents.

634. $^\diamond$ On note $\mathcal{H}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices de trace nulle et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont ils des sous-espaces vectoriels ?
b) Montrer que $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

635. $^\diamond$ Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $f \in \mathbb{C}[X]$, $P \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k P(X+k)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_0, \dots, a_n)$ pour que f soit un isomorphisme.

636. $^\diamond$ Soient E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que $v \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifie $(*)$ si $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.
a) Montrer que si $v \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifie $(*)$, alors $E = \operatorname{Im} v \oplus \operatorname{Ker} u$ et $F = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v$.
b) Soient E_1 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E et F_1 un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans F. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifiant à la fois $(*)$ et $E_1 = \operatorname{Im} v$, $F_1 = \operatorname{Ker} v$.

637. $^\diamond$ Soit S_n l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même.
a) Rappeler le cardinal de S_n.
b) Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que l'application $f \mapsto f \circ \sigma$ réalise une bijection de S_n sur S_n.
c) Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note pour tout $\sigma \in S_n$, f_σ l'unique endomorphisme de E vérifiant $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout i. Montrer que l'application $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un projecteur de E dont on précisera le noyau et l'image.

638. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que la suite $(\operatorname{Ker}(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion jusqu'à un certain rang $r \leqslant n$ au-delà duquel elle est constante. Que dire de la suite $(\operatorname{Im}(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$?
b) Montrer que $\operatorname{Im}(u^k)$ est stable par u pour tout $k \in \mathbb{N}$.
c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{rg}(u^k) - \operatorname{rg}(u^{k+1}) = \dim(\operatorname{Im}(u^k) \cap \operatorname{Ker} u)$.

639. $^\diamond$ Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et D une application de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$\forall A, B \in E$, $D(AB) = D(A)D(B)$ et $D(I_2) \neq D(E_{2,1} + E_{1,2})$.
a) Montrer que si $A \in E$ est nilpotente alors $D(A) = 0$.
b) Montrer que $A \in E$ est inversible si, et seulement si, $D(A) \neq 0$.

640. $^\diamond$ ***a)*** Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$. Montrer que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
b) Montrer que pour tout $A \in GL_2(\mathbb{C})$, il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

641. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme u de E est d'ordre $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si $u^k = \mathrm{id}$ et si, pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $u^i \neq \mathrm{id}$.
a) Que dire en termes de réduction des endomorphismes d'ordre $k \geqslant 1$?
b) Préciser les ordres possibles pour une matrice carrée de taille 2 à coefficients entiers.

642. ***a)*** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$. Montrer que les matrices A et B sont semblables.
b) Le résultats subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$?

643. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 = u^2$ et $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3),\ u \circ v = v \circ u\}$. Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer sa dimension.

644. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $M \mapsto M + \operatorname{tr}(AM)A$.
a) Étudier la diagonalisabilité de φ.
b) Calculer $\operatorname{tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

645. Pour $c \in \mathbb{R}$, on note $A(c) = \begin{pmatrix} -c & -1 & c \\ -1 & 1-c & 1 \\ c & -1 & -c \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les réels c tels que $A(c)$ ne soit pas diagonalisable.
b) Soit d la plus petite de ces valeurs. Trouver P inversible telle que $P^{-1}A(d)P$ soit triangulaire.

646. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.
a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) Déterminer le nombre de sous-espaces stables par A.
c) Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}),\ AM = MA\}$. Déterminer la dimension de $\mathcal{A}$.

647. Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $D : E \longrightarrow E$ vérifiant :
$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}$, $D(f)(x) = x\,f'(x)$.
a) Montrer que D est un endomorphisme et préciser son noyau.
b) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de D.
c) Quelle est l'image de D ?

648. ***a)*** Soit $x = \cos(2\pi/5)$. Déterminer une équation du second degré dont x est racine puis déterminer les valeurs de $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. On suppose que la trace de A est un rationnel. Montrer que 4 divise n.

649. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det A > 0$.

650. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
b) Montrer que χ_A divise tout polynôme annulateur de A.
c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

651. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $f^2 = -\mathrm{id}_E$.
a) Donner un exemple d'un tel endomorphisme.
b) Que dire des valeurs propres de f ?
c) Montrer que la dimension de E est paire.
d) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, de la forme $\mathrm{diag}(A, ..., A)$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

652. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,i} = 0$ pour tout i et $A_{i,j} = i$ si $i \neq j$.
a) Montrer qu'un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$.
b) En déduire que A est diagonalisable. Lister les valeurs propres de A avec un encadrement le plus précis possible.
c) Déterminer la somme des valeurs propres de A. On note μ_n la plus grande d'entre elles. Trouver $C \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_n \sim Cn^2$ quand n tend vers l'infini.

653. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $u(P) = nXP + (1 - X^2)P'$.
a) Soit $P_k = (X+1)^k$. Calculer $u(P_k)$ et montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
En utilisant la question précédente, montrer que A est diagonalisable et préciser son spectre.

654. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, il existe λ_x, $\mu_x \in \mathbb{C}$ vérifiant $u^2(x) = \lambda_x u(x) + \mu_x x$.
a) Montrer que u admet au plus deux valeurs propres.
b) Montrer que, pour tout $x \in E$ non nul, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u. Préciser la dimension de ce sous-espace.
c) On suppose que u admet une unique valeur propre α. Que dire de λ_x et μ_x ?

655. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $u, v_1, \ldots, v_p$ des endomorphismes de E non nuls, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ distincts. On suppose $\forall n \in \{1, \ldots, p\}$, $u^n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n v_i$.
a) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_p[X]$, $P(0) = 0 \Rightarrow P(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) v_i$.
b) Prouver qu'il existe une base $(L_1, \ldots, L_p)$ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ telle que : $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, p\}^2$, $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$.
c) Montrer que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \subset \mathrm{sp}(u) \subset \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

656. Soient p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension n et $\varphi\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $g \mapsto (g \circ p + p \circ g)/2$. Montrer que φ est diagonalisable et préciser ses espaces propres.

657. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme nilpotent de E.
a) Montrer que $\det(u + \mathrm{id}) = 1$.
b) Soit v un automorphisme de E tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\det(u + v) = \det(v)$.
c) Soit f un endomorphisme de E qui s'écrit comme somme d'un endomorphisme diagonalisable d et d'un endomorphisme nilpotent n qui commutent. Montrer que $\det(f) = \det(d)$.

658. Soit A une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux deux à deux distincts.
a) Décrire $C(A)$, l'ensemble des matrices qui commutent avec A.
b) Montrer que $C(A) = \mathbb{R}_{n-1}[A]$, l'ensemble des polynômes en A de degré inférieur ou égal à $n-1$.
c) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples. Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme v quelconque commute avec u.
d) Que peut-on retrouver ainsi concernant A ?

659. Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\beta \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \beta B$.
a) Montrer que A admet un vecteur propre x puis que la suite de vecteurs $(B^k x)_k$ est nulle à partir d'un certain rang.
b) En déduire que A et B admettent un vecteur propre commun.
c) On suppose maintenant que $AB - BA = \alpha A + \beta B$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

660. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et T l'endomorphisme de E associant à une suite u la suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Trouver les éléments propres de T.

661. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A, $B \in E$ et les endomorphismes de E, $u : M \mapsto AM$ et $v : M \mapsto MB$.
a) Montrer que u est un automorphisme si, et seulement si, A est inversible. Que dire pour v ?
b) Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable. Que dire pour v ?
c) On suppose A et B diagonalisables. Montrer que l'application $M \mapsto AMB$ est diagonalisable. Que dire de la réciproque ?

662. Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(K)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

663. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable et que $I_n - A$ est inversible.

664. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.
a) On suppose u inversible. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, u^2 est diagonalisable.
b) Dans le cas général, montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, u^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.

665. * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. Montrer que A est diagonalisable.

666. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $F \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ tel que $\forall u \in \mathcal{L}(E), F(u) = f \circ u$.
a) Montrer que F est diagonalisable si et seulement si f l'est. Dans ce cas, donner une relation entre les dimensions de $E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(F)$.
b) Montrer que f et F ont les mêmes valeurs propres.
c) Tout élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ s'écrit-il sous la forme $u \mapsto f \circ u$?

667. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On note $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs propres de M respectivement associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
a) Montrer que ${}^tM$ est diagonalisable et a les mêmes valeurs propres que M.
On note $w_1, \ldots, w_n$ des vecteurs propres de ${}^tM$ respectivement associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
b) Montrer que, pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $i \neq j$, ${}^tw_i \cdot v_j = 0$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, ${}^tw_i \cdot v_i \neq 0$.
c) Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $B_k = \dfrac{1}{{}^tw_k \cdot v_k}\left(v_k \cdot {}^tw_k\right)$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, B_k est diagonalisable.
d) Pour $r \in \mathbb{N}$, on pose : $G_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^r B_k$. Déterminer G_r.

668. $^\diamond$ Soit E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4, 2e_2 + 3e_4)$ dans la base $\mathcal{B}$.

669. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k = \displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left(\int_0^{+\infty} (x^k - ax - b)^2 e^{-x}\, \mathrm{d}x\right)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, I_k existe, est atteint, et calculer sa valeur.

670. Soit E l'espace des fonctions de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans E on pose :
$\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right)\, \mathrm{d}t.$
a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
b) Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f = f''\}$. Monter que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
c) Déterminer la projection orthogonale de $f \in E$ sur V.

671. ***a)*** Existence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

b) Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\Pi_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X+i)$ et on pose $\Pi_0 = 1$. Montrer qu'il existe $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que $(X-1)\ldots(X-n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \Pi_k$. Calculer p_0.
d) Montrer que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ est orthogonal à $\operatorname{Vect}(X, \ldots, X^n)$.
e) Calculer la distance de 1 à $\operatorname{Vect}(X, \ldots, X^n)$.
f) Calculer la distance de X^n à $\operatorname{Vect}(1, \ldots, X^{n-1})$.

672. Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E vérifiant $f(0) = 0$ et $\forall (x,y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
a) Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \|x\|$.
b) Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $f(-x) = -f(x)$.
c) Montrer que, pour tous $x, y \in E$, on a $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
d) Montrer que f est un automorphisme orthogonal.

673. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle x,y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.
a) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\|f(e_i)\| = c$.
b) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ tel que $f = cg$.

674. ***a)*** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
b) Calculer T_0, T_1 puis, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$. En déduire le degré et le coefficient dominant de T_n.
c) Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
d) Montrer que la famille $(T_n)_n$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

675. ***a)*** Montrer que l'application $(A,B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Montrer que l'ensemble V des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
c) Déterminer une base orthonormée de $V^\perp$.
d) Calculer la distance de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à V.

676. On considère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $(M,N) \mapsto \operatorname{tr}\left(N^T M\right)$.
a) Montrer que cette application est un produit scalaire.
b) Soit H le sous-espace des matrices de trace nulle et J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.

677. Soit $a \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\inf\{\|P-Q\|,\ Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q(a)=0\}$.

678. ***a)*** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\ dt$ est correctement définie puis qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.
b) Soit $(P_0,\dots,P_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de E. Calculer $P_k(0)^2$.
c) Soit F le sous-espace de E constitué des polynômes nuls en 0. Déterminer $F^{\perp}$ puis la distance du polynôme 1 à F.

679. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E de trace nulle. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

680. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$.
a) Montrer que l'on définit un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$ en posant :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f_n(P) = \frac{1}{2}(X^2-1)P'' + XP' - P$. Que peut-on dire de plus concernant f_n ?
b) On pose $T_0 = 1$ puis, pour $j \in [\![1,n]\!]$, $T_j = X^j - P_{j-1}\left(X^j\right)$ où P_{j-1} désigne la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_{j-1}[X]$. Montrer que $(T_0,\dots,T_n)$ est une base orthogonale de vecteurs propres de f_n et préciser les valeurs propres correspondantes.

681. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n dont toutes les valeurs propres sont positives.
a) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.
b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A\,{}^tA$. Montrer que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. Réciproquement, montrer que toute matrice $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $S = A\,{}^tA$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
c) Soient $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\chi_{UV} = \chi_{VU}$.
d) Soient $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers U. En déduire que $\chi_{UV} = \chi_{VU}$.
e) Soient $S, T \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $S+T \in S_n^+(\mathbb{R})$. L'ensemble $S_n^+(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $S_n(\mathbb{R})$?
f) Soient $S, T \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que ST est à valeurs propres réelles positives. A t-on $ST \in S_n^+(\mathbb{R})$?

682. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la troisième :
(i) u est une isométrie ; (ii) $u^2 = -\mathrm{id}$; (iii) pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x\rangle = 0$.

683. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On pose $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ et on note E l'ensemble des vecteurs propres de A de norme 1 (pour la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Pour $X \in E$, on pose $F(A,X) = \inf\left\{\mathrm{tr}\left((A-uX\,{}^tX)^2\right),\ u \in \mathbb{R}\right\}$ puis $m(A) = \inf\{F(A,X),\ X \in E\}$. Montrer que $m(A) = \mathrm{tr}(A^2) - \rho(A^2)$.

Analyse

684. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie ouverte de E.
Montrer que $U = \bigcup_{a \in A} \bar{B}(a,1)$ est un ouvert.

685. Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in E$ telle que $\int_0^1 \varphi(t)\ dt \neq 0$. On pose, pour toute $f \in E$, $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt$ et $N_\varphi(f) = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\ dt\right| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt$. Montrer que N et N_φ sont des normes équivalentes sur E.

686. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to E,\ x \mapsto \dfrac{x}{1+\|x\|}$.
a) Montrer que f est surjective de E sur la boule unité ouverte de E.
b) Montrer que f est lipschitzienne.

687. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E et $k \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne et $g : x \in E \mapsto \inf_{y \in A}\{k\|x-y\| + f(y)\}$. Montrer que g est bien définie et qu'on peut prolonger f par g sur E. Montrer que g est k-lipschitzienne.

688. Soient $(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ les suites définies par $a_1 = b_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = a_n + \beta b_n$, $b_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}(\alpha a_n + b_n)$.
a) Justifier que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.
b) On suppose dorénavant que la suite $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang. Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
c) En déduire que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\, a_n$.

689. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers une limite $r > 0$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $a_0 = b_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 0$,
$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n$, $b_{n+1} = r_n\left(4a_n + b_n\right)$.
a) Justifier que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.
On pose $q_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et on suppose à partir de maintenant que la suite (q_n) est monotone à partir d'un certain rang.
b) Établir que, pour tout entier n, $q_{n+1} = 1 + r_n + \dfrac{r_n}{q_n}$.
c) Montrer que la suite (q_n) est convergente.
d) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} k a_n$ et donner, en fonction de r, la valeur du réel k.

690. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n = 3$ puis déterminer la limite de la suite (x_n) ainsi définie.

691. Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $x \sin x - c \cos x = 0$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
a) Montrer que (E) possède une unique solution x_n dans chaque I_n et que l'ensemble des x_n coïncide avec l'ensemble des solutions positives de (E).
b) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

692. Soit f une fonction continue et décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On considère une suite de réels (r_n) strictement décroissante, convergeant vers 1 et l'on pose $f_n = r_n f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Montrer que f (resp. f_n) admet un unique point fixe ℓ (resp. ℓ_n).
b) Étudier la convergence de la suite (ℓ_n).

693. On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_n \neq u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une telle suite est lentement convergente lorsqu'elle est convergente et qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $p > 0$ tels que : $\forall n \geqslant N$, $\left|\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}\right| \geqslant p$.
a) Soit $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| < 1$. Montrer que toute suite géométrique de raison q est lentement convergente.
b) Montrer que la suite définie par $u_n = 1/n!$ n'est pas lentement convergente.
c) Montrer que pour toute suite lentement convergente on a nécessairement $p \in]0, 1[$.

694. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$.

695. Déterminer selon les valeurs des réels a et b la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$.

696. Soit $a > 0$. Déterminer la nature des séries de termes généraux :
$$u_n = n^a \Big/ \prod_{k=1}^{n}(1 + a^k),\quad v_n = \arccos\left(\frac{n^a}{1+n^a}\right),\quad w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\ln(1+x))\, dx.$$

697. Soit $u_n = (\mathrm{ch}(1/n) - 1)^{\mathrm{sh}(1/n)}$.
a) Déterminer, si elle existe, la limite de u_n quand n tend vers l'infini.
b) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - 1$.

698. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$. Déterminer la nature de la série $\sum a_n$. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

699. Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(3n) = 4n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma(3n+1) = 4n+2$, $\sigma(3n+2) = 2n+1$.
a) Montrer que σ est bijective.
b) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = u_{\sigma(n)}$. Montrer que les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n sont convergentes et calculer leurs sommes.

700. On considère l'équation (E) : $\forall x \geqslant 0$, $x^2 f(x) = 2\displaystyle\int_0^x t f(x-t)\, dt$, d'inconnue $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$.
a) Montrer que toute solution f est nécessairement de classe C^∞.
b) Trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f.
c) En déduire toutes les solutions de (E).

701. Soit F l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telles que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.
a) Montrer que, pour tout $f \in F$, $\displaystyle\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\, dt \geqslant e^{-1}$.
b) Montrer que $\displaystyle\inf_{f\in F} \int_0^1 |f'(t) - f(t)|\, dt = e^{-1}$.

702. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
Montrer que $M_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt + \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

703. Soit $y \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$.

704. Soit $y \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer $I(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+ixy)}$.

705. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1\right) dt$.

706. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$.
a) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Établir que $g : t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.
d) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$.

707. Soit $\alpha \in [0, 1[$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux telle que $f(x+1)/f(x) \to \alpha$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

708. ***a)*** Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ est convergente puis, à l'aide d'une minoration usuelle de l'exponentielle, montrer que $I > 1/10$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $\displaystyle\int_{1/n}^{u_n} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{10n}$.
Montrer que la suite (u_n) est convergente.
c) Montrer que $\left(u_n - \dfrac{1}{n}\right) e^{-u_n^2/2} \leqslant \dfrac{1}{10\,n} \leqslant \left(u_n - \dfrac{1}{n}\right) e^{-1/2n^2}$. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

709. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.
a) Déterminer le domaine de définition I de f.
b) Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I.
c) Montrer que f admet en $+\infty$ une limite finie que l'on déterminera.
d) Trouver un équivalent de f en 0. On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

710. ***a)*** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
b) Trouver les limites de f en 0 et en $+\infty$, puis des équivalents de f en 0 et en $+\infty$.

711. Soit $f \;:\; x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{e^x}{4} + \dfrac{3e^{-x}}{4} + \dfrac{xe^x}{2}$.
a) Justifier que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
b) On note alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_n \neq 0$ et que $\dfrac{1}{a_n} \in \mathbb{N}$.

712. Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ en discutant selon le signe de x.

713. On considère la suite $(a_n)_n$ définie par $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\;dt$.
a) Étudier les variations de la suite $(a_n)_n$ puis sa limite.
b) Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_{n-1}.
c) Justifier la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
d) Montrer que la série entière de coefficient a_n a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 puis montrer que la somme de cette série est solution de l'équation différentielle $(1 - x^2)y' - xy = 1$.

714. ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de partitions de $\{1, \ldots, n\}$. On pose $p_0 = 0$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.
b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{p_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.
c) Calculer la somme de cette série entière.

715. ***a)*** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de coefficients $(-1)^n \ln(n)$.
b) On note S la somme de cette série. Calculer $(x + 1)S(x)$.
c) En déduire que S admet une limite finie en R que l'on calculera.

716. Une involution d'un ensemble X est une application $f : X \to X$ telle que $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in X$. On note I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$.
a) Calculer I_1, I_2, I_3.
b) Montrer que, pour tout n, $I_{n+2} = I_{n+1} + (n + 1)I_n$. Que peut-on en déduire sur le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{I_n}{n!} x^n$?
c) On note $S(x)$ la somme de cette série entière. Calculer $(1 + x)S(x)$ puis en déduire une expression de I_n sous forme de somme.

717. Soient $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.
a) Donner le rayon de convergence de f puis calculer $f(x)$.
b) Donner le rayon de convergence de g.
c) Montrer que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to 1$.
d) Montrer que $g(x)$ converge quand $x \to -1$ *Ind.* Considérer $(1 - x)g(x)$.

718. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt) \ln(t)\; dt$.
a) Monter que g est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $g(0)$.
b) Monter que g est de classe C^1 et calculer $g'(0)$.

719. On pose, pour tout réel $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\; dt$.
a) Vérifier que la fonction F est bien définie.
b) Déterminer le comportement asymptotique de F en $+\infty$.
c) Calculer $F(x)$.

720. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)(1 + t^x)}$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $f(0)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer $f(x)$.

721. On considère les fonctions définies pour $x > 0$:

$f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$, $g : x \mapsto \left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right)\cos x - \left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt\right)\sin x$.

a) Vérifier que les intégrales dans l'expression de g sont convergentes.

b) Montrer que f et g vérifient l'équation différentielle : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

c) Montrer que $f = g$ et établir l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

722. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)\,dt$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle.

c) En déduire f.

723. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^x)\,dt$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Écrire f comme somme d'une série de fonctions.

c) Déterminer la limite de f en 0.

724. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Trouver un équivalent simple de f en $+\infty$.

c) Trouver un équivalent simple de f en 0.

725. Soient $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$ et $I_\beta : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)e^{-\beta t}}{1+t^2}\,dt$.

a) Montrer que I_β est de classe C^2 et que I_β est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - y = \dfrac{-\beta}{\beta^2 + x^2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F_\beta(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\beta e^{-t}}{\beta^2+t^2}\,dt$ et $J_\beta(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x F_\beta(x) + e^{-x}F_\beta(-x)\right)$.

b) Montrer que J_β vérifie (E) puis que $J_\beta = I_\beta$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{\frac{1}{n}}(x) = 0$ si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{\frac{1}{n}}(0) = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{\frac{1}{n}}(x) = \pi$ si $x < 0$.

726. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(t^2+1)}\,dt$.

a) Déterminer le domaine de définition de f puis montrer que f est impaire.

b) Montrer que f est de classe C^1.

c) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Trouver des réels a et b pour que, pour tout $T > 0$, $\dfrac{1}{(1+T)(1+x^2T)} = \dfrac{a}{1+T} + \dfrac{b}{1+x^2T}$. En déduire $f'(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

d) Déterminer l'expression de $f(x)$.

727. Soit $a > 1$ et $f : t \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(t^2+x^2)^a}$.

a) Donner l'ensemble de définition D de f.

b) Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

c) Montrer que f est intégrable sur D.

728. *a)* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Montrer : $\dfrac{x}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-\left(\frac{kx}{n}\right)^2} \leqslant \int_0^x e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\left(\frac{kx}{n}\right)^2}$.

b) On considère $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt$. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de g puis montrer que $g'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

c) En déduire $g(x)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

729. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)}\,dt$.

a) Déterminer le domaine D de définition de f puis montrer que f est continue sur D.

b) Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(1-x)$ pour $x \in D$.

c) Déterminer les limites et des équivalents de f aux bornes de D.

730. *a)* Soit $g :]0,+\infty[, x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}\,dt$. Montrer que f est de classe C^2. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant x^2$.

c) On pose $a = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $y'' - y = \dfrac{\pi}{2} - ax$.

d) En déduire que $a = \dfrac{\pi}{2}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\left(e^{-x} + x - 1\right)$.

731. Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

a) Donner le domaine de définition de Γ.

b) Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \ln(\Gamma(u))\,du$.

c) En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\ln(\Gamma(x))$.

732. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^{t^x \ln t}\,dt$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

c) Donner une expression de $f(x)$ comme somme de série pour $x > 0$.

d) Étudier la limite de f en $+\infty$.

733. Soit $T : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}-1}{t} e^{-t}\, dt$. Montrer que T est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $T(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

734. Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t}\, dt$.
Justifier la définition de f puis donner une expression de $f(x)$ comme somme d'une série.

735. Écrire l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}\, dt$ comme somme d'une série.

736. *a)* Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\, dt$.
b) Montrer que $t \mapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$, puis que $\displaystyle\int_0^1 e^t \ln(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.n!}$.

737. Soit $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1-e^t}\, dt$.
a) Montrer que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
b) Si $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe des réels a et b que l'on exprimera en fonction de x, tels que $I(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{b^2+n^2}$.
c) En déduire la limite de I en $+\infty$.

738. Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ un suite croissante de limite $+\infty$. Montrer l'égalité :
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a_n}.$$

739. *a)* Résoudre $2y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$, après avoir justifié l'existence et l'unicité de la solution.
b) En déduire la valeur de $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}\, dt$.

740. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(x) = {}^tM(x)M(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
b) Soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue et $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation différentielle $M'(x) = A(x)\,M(x)$. On suppose que $M(0) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

741. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ et $f(0,0) = 1$.
a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
c) Déterminer les variations de $g : x \mapsto f(x,0)$.
d) La fonction f admet-elle un extremum en $(0,0)$?
e) Déterminer tous les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

Probabilités

742. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $]0,+\infty[$, indépendantes et de même loi. On pose $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ et $Y_2 = \dfrac{X_2}{X_1+X_2}$.
a) Démontrer que Y_1 admet une espérance finie et calculer $\mathbf{E}(Y_1)$.
b) Démontrer que Y_1 admet une variance finie, puis montrer que $\mathrm{cov}(Y_1,Y_2) = -V(Y_1)$.

743. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer que $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda+1) \leqslant \lambda$ et que $\mathbf{P}\left(X \geqslant \dfrac{\lambda}{3}\right) \leqslant \dfrac{9}{4\lambda}$.

744. *a)* Soit X et Y des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $(\mathbf{E}(XY))^2 \leqslant \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)$.
b) Soit Z une variable aléatoire à valeurs strictement positives, admettant un moment d'ordre 2 et $a \in]0,1[$. Montrer que $\mathbf{P}(Z \geqslant a\mathbf{E}(Z)) \geqslant (1-a)^2 \dfrac{\mathbf{E}(Z)^2}{\mathbf{E}(Z^2)}$.

745. On considère une pièce non équilibrée, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0,1[$. On se propose d'étudier le procédé d'équilibrage de la pièce suivant : on lance deux fois la pièce. Si on obtient une fois pile et une fois face, on arrête l'expérience. Dans le cas contraire, on répète l'expérience. On note T la variable aléatoire indiquant le nombre de lancers effectués jusqu'à l'arrêt de l'expérience.
a) Donner la loi de T.
b) Montrer que T est presque sûrement finie.
c) Calculer l'espérance de T.

746. On considère des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $[\![1,n+1]\!]$ dont la loi jointe est donnée par : $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$, $\mathbf{P}(X=i, Y=j) = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{n}{i-1}\dbinom{n}{j-1}$.
a) Déterminer la loi de X.
b) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
c) Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j} = \mathbf{P}(X=i, Y=j)$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
d) Exprimer M^2 à partir de M.
e) Préciser le spectre de M.

747. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose $Z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} X_k$.
a) Donner la loi de Z_0 puis celle de Z_1.

b) Trouver une relation entre Z_{n+1} et Z_n ; en déduire la loi de Z_n.

748. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \dfrac{1}{2}$. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On fixe $r > 0$.

a) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\operatorname{ch} t \leqslant e^{t^2/2}$.

b) Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $t > 0$, $\mathbf{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant r\right) \leqslant \mathbf{E}\left(\exp\left(t\left(\dfrac{S_n}{n} - r\right)\right)\right)$.

c) Montrer que $\mathbf{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant r\right) \leqslant \exp\left(-\dfrac{nr^2}{2}\right)$.

749. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Le joueur A lance $6n$ dés et gagne s'il a au moins n fois la face 6. Le joueur B lance $6(n+1)$ dés et gagne s'il a au moins $n+1$ fois la face 6. On cherche à savoir quel joueur a le plus de chances de gagner. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de fois que B a eu la face 6 au cours des $6n$ premiers lancers, Y la variable aléatoire donnant le nombre de fois que B a eu la face 6 au cours des 6 derniers lancers. Ainsi, $X_{n+1} = X_n + Y$ avec X_n et Y indépendantes.

a) Donner les lois de X_n et de Y.

b) Montrer $\mathbf{P}(X_{n+1} \geqslant n+1) = \mathbf{P}(X_n \geqslant n+1) + \displaystyle\sum_{r=1}^{6} \mathbf{P}(X_n = n+1-r)\mathbf{P}(Y \geqslant r)$.

c) Montrer que $\max\{\mathbf{P}(X_n = j),\ j \in \{0, \dots, 6n\}\} = \mathbf{P}(X_n = n)$.

d) Conclure.

750. Soient $n \geqslant 2$, $A_1, \dots, A_n$ des points distincts du plan. Chaque couple $\{A_i, A_j\}$ de points distincts est relié avec probabilité p_n. Un point est isolé s'il n'est relié à aucun autre point. Soit, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i la variable de Bernoulli égale à 1 si le point A_i est isolé, à 0 sinon. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Trouver la loi de X_i et son espérance.

b) Majorer $\mathbf{P}(S_n \geqslant 1)$.

On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $p_n = \dfrac{c\ln(n)}{n}$.

c) On suppose $c > 1$. Montrer que $\mathbf{P}(S_n = 0) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

d) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant un moment d'ordre 2. Montrer que $\mathbf{P}(Z = 0) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(Z)}{\mathbf{E}(Z)^2}$.

e) On suppose $c < 1$. Calculer $\mathbf{E}(S_n^2)$ et en déduire la limite de $(\mathbf{P}(S_n = 0))_{n \geqslant 2}$.

751. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre λ. Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

752. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $|Y|$ suit une loi de Poisson et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y = -n) = \mathbf{P}(Y = n)$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & Y & 1 \\ Y & 0 & 1 \\ Y & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner la loi du rang de A.

b) Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

753. On considère quatre variables aléatoires de Bernoulli X, Y, Z et T i.i.d. et la matrice
$$A = \begin{pmatrix} X & X & X & X \\ X & Y & Y & Y \\ X & Y & Z & Z \\ X & Y & Z & T \end{pmatrix}.$$

a) Donner la loi de $\operatorname{tr}(A)$.

b) Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

c) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

d) Trouver les valeurs propres de A.

754. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement independantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $L = (X_1 \cdots X_n)$ (matrice ligne) et $M = {}^tLL$.

a) Déterminer la loi du rang de M et celle de la trace de M.

b) Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?

c) On suppose que $n = 2$ et on note $Z = (1\ 1)$ (en ligne). Déterminer l'espérance et la variance de $A = ZM\,{}^tZ$.

Mines-Ponts - PC

Algèbre

755. $^\circ$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in [-1, 1]$, $P = X^{n+1} - aX^n + aX - 1$. Montrer que les racines de P sont de module 1.

756. $^\circ$ Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

757. $^\circ$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n-1}$ et $P = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

a) Montrer que P possède une unique racine dans $\mathbb{R}^{+*}$ que l'on note ρ.

b) Soit z une racine complexe de P. Montrer que $|z| \leqslant \rho$.

c) Montrer que $\rho \leqslant \max\{1\ ,\ a_0 + \cdots + a_{n-1}\}$.

d) Montrer que $\rho \leqslant 1 + \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} a_k$.

758. $^\circ$ ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\varphi_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \to P - P' \in \mathbb{R}_n[X]$ est bijective.

b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = R - R'$.

c) On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $R(x) \geqslant 0$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \geqslant 0$.

d) On suppose R scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer qu'il en est de même pour Q. *Ind.* Considérer $x \mapsto e^{-x}R(x)$.

759. $^\diamond$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geqslant 1$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$.

760. $^\diamond$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.
a) Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.
b) Montrer que P ne peut avoir un coefficient nul entouré de deux coefficients non nuls et de même signe.

761. $^\diamond$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation ${}^tX + X = \operatorname{tr}(X)\,A$.

762. $^\diamond$ Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que M est la matrice d'un projecteur.
b) Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = M$. Montrer que $BA = I_2$.

763. $^\diamond$ Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABAB = 0$. Montrer que $BABA = 0$. Généraliser.

764. $^\diamond$ ***a)*** Montrer que les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(K)$ sont les applications de la forme $\varphi : A \to \operatorname{tr}(AM)$, où $M \in \mathcal{M}_n(K)$.
b) En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contient une matrice inversible.

765. $^\diamond$ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$.
a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.
b) Montrer que f est un automorphisme si et seulement si $f^2 + \mathrm{id} = 0$.
On suppose dans la suite que $f^2 + \mathrm{id} = 0$.
c) Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.
d) Soit $(x,y) \in E^2$. On suppose que $(x, f(x), y)$ est libre. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.
e) Si E est de dimension finie, que peut-on dire de sa dimension ?

766. $^\diamond$ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
b) Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$.

767. $^\diamond$ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} f) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker} f)$.

768. $^\diamond$ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
a) Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont stables par g.
a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p et f commutent si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.

769. $^\diamond$ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que $f + g = \mathrm{id}$ et $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant \dim E$.

a) Montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$.
b) Montrer que f et g sont des projecteurs.

770. $^\diamond$ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{i,i} = a$ et $m_{i,j} = b$ si $i \neq j$. Calculer $\det(M)$.

771. $^\diamond$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à la matrice $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $b_{i,i+1} = 1$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls.

772. $^\diamond$ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.
a) Montrer que $I_n + N + \cdots + N^{n-1}$ est inversible et calculer son inverse.
b) Montrer que $I_n + 2N + 3N^2 + \cdots + nN^{n-1}$ est inversible et calculer son inverse.

773. $^\diamond$ Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
a) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.
b) Soit $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E)\ ,\ f \circ g = g \circ f\}$. Montrer que $(\mathrm{id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}$.

774. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $B^n = 0$ et que $AB = BA$. Montrer que A est inversible si et seulement si $A + B$ l'est.

775. $^\diamond$ Soient $n \geqslant 2$, p un projecteur de $\mathbb{R}^n$, P la matrice de p dans la base canonique, r le rang de p. Soit $\Psi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PX - XP$. Exprimer la trace de Ψ en fonction de r et de n.

776. $^\diamond$ Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k e^{\alpha x}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \operatorname{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dimension de E_n.
b) Montrer que l'application $D_n : f \in E_n \mapsto f'$ est un endomorphisme de E. Montrer que D_n est un automorphisme si et seulement si $\alpha \neq 0$.

777. Déterminer le commutant de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

778. Déterminer les éléments propres de $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

779. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Donner une base de l'image et du noyau de f.

b) Montrer que l'image de f est stable par f.
c) On note g l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f. Donner la matrice de g dans une base de $\mathrm{Im}(f)$.
d) Déterminer les éléments propres de g.
e) En déduire les éléments propres de f.

780. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $f(P) = P(1)X - P(3)(25 - X^2)$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, dont on donnera le noyau, l'image et les éléments propres.

781. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. Déterminer les valeurs propres de $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$, les autres coefficients étant nuls.

782. Soient $n \geqslant 3$ et $P = X^n - X + 1$.
a) Déterminer le nombre de racines réelles de P.
b) Montrer que P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
c) Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $m_{1,n} = -1$, $m_{2,n} = 1$, $m_{i+1,i} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les autres coefficients étant nuls. Montrer que M est diagonalisable.

783. Deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme caractéristique $(X-1)(X-2)^2$ sont-elles semblables ?

784. L'endomorphisme $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + {}^tM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il diagonalisable ?

785. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\Phi : M \mapsto \mathrm{tr}(M)\, I_n + M$.

786. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(AM)\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les éléments propres de Φ.

787. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Diagonaliser A. En déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$, $(w_n)_{n\geqslant 0}$ trois suites réelles telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -4u_n + 6v_n$, $v_{n+1} = 3u_n + 5v_n$, $w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = {}^t(u_n\, v_n\, w_n)$.
b) Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_0.
c) En déduire une expression de u_n, v_n, w_n en fonction de u_0, v_0, w_0.

788. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $v \in E$ et enfin $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f(e_1) = \dots = f(e_n) = v$. Préciser le rang de f puis étudier la diagonalisabilité de f.

789. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que f est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 et contient le vecteur $u = {}^t(1, 1, 0)$.
c) On pose $v = {}^t(0, 0, 1)$. Calculer $(f - \mathrm{id})(v)$.
d) Déterminer un vecteur propre $w \in \mathbb{R}^3$ de l'endomorphisme f associé à la valeur propre 2 et montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
e) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $f^k(v)$ et en déduire T^k où T désigne la matrice de f dans la base (u, v, w).
f) Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

790. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X^n P(1/X) \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que Φ est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres de Φ.

791. Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$ et $a \in \mathbb{R}$.
Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X - a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$.
a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Phi$ et $\mathrm{Im}\,\Phi$.
c) Déterminer les valeurs propres de Φ.

792. Soit $A = \left(\dfrac{i}{j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Donner $\mathrm{rg}\,A$.
b) Donner χ_A.
c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
d) Calculer A^p.

793. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note χ_n le polynôme caractéristique de A_n.
a) Calculer χ_2 et χ_3.
b) Montrer que χ_n est divisible par X^{n-2} si $n \geqslant 2$.
c) Calculer χ_n et préciser les éléments propres de A_n.

794. Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) On pose $P_0 = X + a_{n-1}$ et, pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $P_j = X\,P_{j-1} + a_{n-1-j}$. Déterminer P_{n-1}.
b) Calculer χ_A.
c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

795. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, soit $u(f) : x \in [0,\pi] \mapsto \int_0^\pi f(t)\sin(x+t)\,dt$.
a) L'application u définit-elle un endomorphisme de E ?
b) Montrer que l'image de u est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et stable par u.
c) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$, puis les valeurs propres de u.

796. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes. Montrer que A et B commutent si et seulement si A et B ont une base de vecteurs propres communs.

797. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.
a) Montrer que A est inversible.
b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Donner une équation dont λ est racine.
c) Montrer que $\det A > 0$.

798. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que l'entier n est pair et que $-\mathrm{tr}(A)$ est dans $\mathbb{N}$.

799. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est stochastique si les $a_{i,j}$ sont tous positifs ou nuls et si, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $a_{i,1} + a_{i,2} + \dots + a_{i,n} = 1$.
a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastiques. Montrer que AB est stochastique.
b) Soit A une matrice stochastique. Montrer que 1 est valeur propre de A. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module $\leqslant 1$.
c) Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastiques telles que A^{-1} soit stochastique.

800. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.
a) Montrer que f est nilpotente.
b) On suppose que $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et une base e de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_e(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda+n \end{pmatrix}.$$

801. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{i,j}|$.
a) Montrer que A est inversible.
b) Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer qu'il existe $p \in \{1,\dots,n\}$ tel que $|a_{p,p} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq p}} |a_{p,j}|$.

c) On suppose de plus que, pour tout i, $a_{i,i} > 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

802. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $P_n = (-1)^n \chi_{M_n}$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P_{n+1} = (n - X)P_n + (-1)^n X(X-1)\cdots(X-n+1)$.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, $(-1)^k P_n(k) > 0$.
c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que M_n est diagonalisable et que, si $n \geqslant 2$, chacun des intervalles $]0,1[,]1,2[, \dots,]n-2, n-1[,]n-1, +\infty[$ contient une valeur propre de M_n.

803. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

804. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B nilpotente. On suppose $BA = 0$.
a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A + B) = \mathrm{Sp}(B)$.
b) Le résultat est-il toujours vrai si B est nilpotente et $AB = 0$?

805. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

806. *a)* Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
b) Soient A et B deux matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'ayant aucune valeur propre en commun. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

807. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $N = \bigcup_{p=1}^{+\infty} \mathrm{Ker}(u^p)$ et $I = \bigcap_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u^p)$.
a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $N = \mathrm{Ker}(u^n)$ et $I = \mathrm{Im}(u^n)$.
b) Montrer que $E = N \oplus I$, que N et I sont stables par u, que l'endomorphisme induit par u sur N (resp. I) est nilpotent (resp. bijectif).
c) Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. On suppose que F et G sont stables par u, que u induit un endomorphisme nilpotent (resp. bijectif) de F (resp. G). Montrer que $F = N$ et $G = I$.

808. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
a) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
b) Calculer A^6.

c) Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que A soit la matrice dans la base canonique d'une rotation.

809. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et A une partie de E.
On pose $B = \{\langle x, y\rangle\ ,\ (x, y) \in A^2\}$. Montrer que A est finie si et seulement si B est finie.

810. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que $\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2 \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
b) Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
c) Déterminer le projeté orthogonal de X sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
d) Déterminer la distance de X à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

811. *a)* On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Déterminer $\inf\left\{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 + xt^2 + yt + z)^2\,\mathrm{d}t,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

812. *a)* Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'application $(P, Q) \in E^2 \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
b) Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - (at^2 + bt + c)\right)^2\,\mathrm{d}t$.

813. $^\diamond$ *a)* Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pour que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)\,Q(a_k)$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Cette condition étant réalisée, donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.
c) Soit H l'ensemble des P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0$. Déterminer $H^\perp$.

814. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geqslant 2$, $F = \{P \in E,\ P(0) = 0\}$. On pose, pour $(P, Q) \in E^2$, $\Phi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
a) Justifier la définition de Φ. Montrer que Φ définit un produit scalaire sur E.
Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ la base de E obtenue en orthonormalisant $(1, X, \ldots, X^n)$.
b) Calculer $P_k(0)^2$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$.
c) En déduire une base de $F^\perp$ s'exprimant à l'aide des P_k.
d) Déterminer $\inf\left\{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + a_1t + \cdots + a_nt^n)^2\,\mathrm{d}t,\ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$.
e) Montrer que $P_1, \ldots, P_n$ sont scindés sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

815. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille de vecteurs de E, on pose $G(u_1, \ldots, u_p) = (\langle u_i, u_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.
a) Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que cette famille est libre si et seulement si le déterminant de $G(u_1, \ldots, u_p)$ est non nul.
b) Soient F un sous-espace vectoriel de E, $(e_1, \ldots, e_p)$ une basede F. Montrer que $d(x, F)^2 = \dfrac{\det\left(G(e_1, \ldots, e_p, x)\right)}{\det\left(G(e_1, \ldots, e_p)\right)}$.

816. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -5 \\ 5 & 3 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A.
a) Montrer que f est diagonalisable.
b) Déterminer $\operatorname{Ker} f$. Montrer que $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ est stable par f.
c) Soit g l'endomorphisme de $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ induit par f. Déterminer ses valeurs propres.

817. Soit, pour $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$.
a) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
b) Montrer que les valeurs propres de A vérifient $a(t) < 0 < b(t) < 2 < c(t)$.
c) Montrer que, lorsque t tend vers $+\infty$, $a(t)$ tend 0. Donner la limite de $b(t)$, et montrer que $c(t) = t + o(1)$.

818. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que :
$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.
Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|$.

819. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Déterminer les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout sous-espace vectoriel V, $f(V^\perp) \subset f(V)^\perp$.

820. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\operatorname{tr}(AB + BA))^2 \leqslant 4\operatorname{tr}(A^2)\ \operatorname{tr}(B^2)$.

821. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

822. Soient $n \geqslant 3$, $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{1,i} = a_{i,1} = a_{n,i} = a_{i,n} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les autres coefficients étant nuls. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses espaces propres.

823. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille n.
a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En étudiant ${}^t\overline{X}AX$, où X est un vecteur propre de A, montrer que $\lambda \in i\mathbb{R}$.
b) Pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on pose $\Phi(A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'admettant pas la valeur propre -1.

824. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(A)^2 \leqslant \operatorname{rg}(A)\operatorname{tr}(A^2)$.

825. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$.
a) Montrer que $\operatorname{Ker}(A + {}^tA) = \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} {}^tA$.
b) Montrer que $A + {}^tA$ est inversible si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A$.

826. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que ${}^tAA = A{}^tA$. Montrer que $\Omega = {}^tA^{-1}A$ est orthogonale.

827. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(*) : M\,{}^tMM = I_n$.
a) Soit M vérifiant $(*)$. Montrer que M est inversible puis que M est symétrique.
b) En déduire l'ensemble des solutions de $(*)$.

828. Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On suppose que ${}^tAA = {}^tBB$. Soit f (resp. g) l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ canoniquement associée à A (resp. B). On munit $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$ de leur structure euclidienne canonique.
a) Montrer que $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$.
b) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^q$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle$.
c) Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ tel que $A = UB$.

829. Montrer que l'application $M \mapsto M^3$ est une bijection de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même.

830. Soient A et B deux matrices symétriques réelles. On suppose que les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.
a) Montrer que $\langle X, Y\rangle = {}^tXAY$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
b) Montrer que $A^{-1}B$ est diagonalisable.

831. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - a_{k,k})$. Montrer que A est diagonale.

Analyse

832. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^2$. On pose $A+B = \{a+b,\ a \in A \text{ et } b \in B\}$.
a) On suppose A ouverte. Montrer que $A + B$ est ouverte.
b) Si A et B sont fermées, $A + B$ est-elle nécessairement fermée ?

833. Soit $n \geqslant 2$. Soient (A_k) et (B_k) deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant respectivement vers A et B. On suppose que, pour tout k, A_k est semblable à B_k. Est-il vrai que A est semblable à B ?

834. ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\operatorname{tr} M^k = 0$. Montrer que M est nilpotente.
b) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, A est semblable à $A + tB$. Montrer que B est nilpotente.
c) Soit $(M_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de matrices semblables entre elles. On suppose que $M_k \to 0$. Montrer que M_0 est nilpotente.
d) Soit réciproquement M_0 une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe une suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ de matrices semblables entre elles telle que $M_k \to 0$.

835. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui à la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$.
a) Montrer que s est un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\operatorname{Ker}(s^p)$.
c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Donner une expression de $(s^p(u))_n$.

836. $^\diamond$ On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$. Déterminer un équivalent de u_n.

837. $^\diamond$ Soient $a > 0$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.
a) Tracer le graphe de $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.
b) Étudier la convergence de (u_n).

838. $^\diamond$ Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right)$.

839. $^\diamond$ Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$ et $v_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$.
Déterminer les limites éventuelles de (u_n) et de (v_n).

840. $^\diamond$ ***a)*** Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{6} - \frac{x_n}{6}$. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.
b) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{6} - \frac{u_n}{6} + 1$. Montrer que (u_n) converge et trouver sa limite.

841. Déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$.

842. $^\diamond$ ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Montrer que l'équation $x^n = x + 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, que l'on note x_n.
b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.
c) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

843. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3 + 3^n}{n!}$ converge et calculer sa somme.

844. $^\diamond$ *a)* Montrer que $S=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{(n+2)(n-1)3^n}$ converge.
b) Trouver α et β tels que, pour tout $n\geqslant 2$, $\dfrac{n}{(n+2)(n-1)}=\dfrac{\alpha}{n+2}+\dfrac{\beta}{n-1}$.
c) Calculer S.

845. $^\diamond$ On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2$.
a) Déterminer un équivalent de u_n.
b) Nature de la série de terme général $1/u_n$?

846. Si $n\in\mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. Déterminer la nature de $\sum(10-n^{1/p_n})$.

847. Justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ et calculer cette somme.

848. Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$. Nature de $\sum u_n$?

849. Soit $a>0$. Nature, suivant $\alpha\in\mathbb{R}$, de la série de terme général $\dfrac{n^\alpha}{(1+a)\cdots(1+a^n)}$?

850. $^\diamond$ Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose $f>0$, $f'<0$, $f(0)=1$. Soit $(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $x_0>0$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=x_n\,f(x_n)$.
a) Étudier la suite (x_n).
b) Déterminer la nature de la série de terme général x_n.

851. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $a_1=1$ et $a_n=2a_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ pour $n\geqslant 2$. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et que $\sum a_n^{-2}$ converge.

852. $^\diamond$ Soit $\alpha\in\mathbb{Q}$.
a) Montrer qu'il existe $c>0$ tel que : $\forall(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ \alpha\neq\dfrac{p}{q}\Rightarrow\left|\dfrac{p}{q}-\alpha\right|\geqslant\dfrac{c}{q}$.
b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$ est irrationnel.
c) Qu'en est-il de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}$?

853. *a)* Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels positifs. On suppose que $u_n\sim v_n$ et que $\sum v_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}u_k\sim\sum_{k=n}^{+\infty}v_k$.

b) On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$. Déterminer la limite de (u_n). Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

854. En étudiant un développement limité de $(e^x-1)^n$ au voisinage de 0, montrer que, pour tout $m\in\{0,\ldots,n\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^m=\delta_{m,n}(-1)^n n!$.

855. Déterminer les $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\in[f(x),f(y)]$.

856. Soit $\alpha>0$. Donner l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{C}^1(]-\alpha,\alpha[,\mathbb{R}^*)$ telles que $f(0)=1$ et telles que, pour tout $x\in]-\alpha,\alpha[$, $f^2(x)=2f'(x)$.

857. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
a) On suppose que la fonction $\cos\circ f$ est constante. La fonction f est-elle constante ?
b) On suppose que la fonction $\sin\circ f$ admet une limite réelle en $+\infty$. La fonction f admet-elle une limite réelle en $+\infty$?

858. Déterminer les $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(\sin x)$. Donner une généralisation.

859. *a)* Montrer que cos admet un unique point fixe.
b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction dérivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f\circ f=\cos$.

860. Soit $F:x\mapsto\displaystyle\int_1^x\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$.
a) Montrer que F admet un minimum.
b) Montrer que, pour tout $x\in]0,1]$, $\dfrac{x\ln(x)-x+1}{2}\leqslant F(x)\leqslant x\ln(x)-x+1$.
c) Montrer que F possède une limite en 0^+ et que cette limite appartient à $[1/2,1]$.

861. Donner un équivalent lorsque x tend vers 0 de $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}\,dt$.

862. Soit $f:]0,1[\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,e^t\,dt=\int_0^1 f(t)\,e^{-t}\,dt=0$. Montrer que $\forall a\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1\operatorname{sh}(a+t)f(t)\,dt=0$. En déduire que f admet au moins deux zéros dans $]0,1[$.

863. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\operatorname{ch}(x)\sin^2(x)}$.

864. Montrer la convergence et calculer l'intégrale $\int_1^{+\infty} \exp(-\sqrt{u})\ du$.

865. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(2nt)\ln(\sin t)\ dt$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier la définition de I_n.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $nI_n - (n+1)I_{n+1}$. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

866. Justifier l'existence et calculer, pour $\lambda > 0$, $I(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}|\sin t|\,dt$.

867. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

a) Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n).

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\ dt$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\ dt$.

868. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp\left(\dfrac{(n-1)x}{n}\right)$.

a) Montrer la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, et sur $\mathbb{R}$.

869. Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et que, pour $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $|f(x)| < |x|$. On pose $f_1 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = f_n \circ f$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction nulle.

870. Soit $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nt}$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

871. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$. Étudier la convergence, simple, uniforme, normale, normale sur tout segment de $\sum f_n$.

872. On pose $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 + n^4x^2}$.

a) Montrer que la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction S est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

c) La fonction S est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

873. Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n + n^2x}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Déterminer un équivalent de f en 0^+.

874. Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{n}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier la continuité de f, puis son caractère $\mathcal{C}^1$.

c) Étudier la limite de f et de f' en $+\infty$.

875. ***a)*** Justifier la convergence et calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $I(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+t^2x^2}\ dt$.

b) On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

i) Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$.

ii) Déterminer les limites de S à droite et à gauche en 0.

iii) Déterminer la limite et un équivalent de S en $+\infty$.

876. Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $\int_0^{+\infty} f$.

877. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$. On pose $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et continue.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \geqslant n$. Montrer que $f(x_0) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

En déduire que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

d) Montrer que $f(x)/x \to 0$ quand $x \to +\infty$.

878. On considère $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \exp(-x\sqrt{n})$. Donner le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D. Déterminer la limite de f en 0^+.

879. Soient $f : x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x\,e^{-nx}}{\ln(n)}$ et, pour $n \geqslant 1$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{x\,e^{-kx}}{\ln(k)}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
b) Soit $x > 0$. Montrer $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{x\, e^{-x}}{\ln(n+1)\,(1-e^{-x})}$.
c) Étudier la continuité de f.
d) Étudier la dérivabilité de f en 0.

880. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) La fonction f est-elle continue, de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ?
c) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

881. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) Montrer que f est continue sur D.
c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

882. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-x)x^n}{1+x^n}$.
a) Montrer que f est définie sur $]-1,1]$, continue sur $]-1,1[$.
b) Soit $x \in]0,1[$. On pose $\varphi_x : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x^t}{1+x^t}$. Montrer que φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$.
c) En déduire un encadrement de $f(x)$ et la limite de f en 1^-.
d) La série de fonctions définissant f converge-t-elle uniformément sur $]-1,1]$?

883. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : t \mapsto (-1)^n \dfrac{e^{-nt}}{n}$.
a) Justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et calculer cette somme.
b) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
c) Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+e^{-t}\right)\,\mathrm{d}t$. Justifier la convergence de I. Calculer I.

884. Soit (u_n) une suite positive de limite nulle. On note $D = \left\{\alpha \in \mathbb{R},\ \sum u_n^\alpha \text{ converge}\right\}$.
a) Montrer que D est soit vide, soit de la forme $[s,+\infty[$, soit de la forme $]s,+\infty[$.

b) On note $f : \alpha \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^\alpha$. L'application f est-elle continue sur D ? Est-elle monotone ?

885. Soit, pour $n \geqslant 2$, $a_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$. Étudier la convergence de $\sum a_n R^n$ et de $\sum a_n(-R)^n$.

886. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

887. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et que f est bornée sur $[0,1[$. Montrer que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

888. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. On suppose que $n\left(\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
a) Si $\ell \neq 0$, déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
b) Que se passe-t-il pour $\ell = 0$?

889. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2k}{k}$.
Ind. Utiliser la série entière $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

890. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
b) Y a-t-il convergence pour $x = R$? pour $x = -R$?
c) Calculer la limite de S en R.

891. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.
On pose $S : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.
b) Que peut-on en déduire quant au rayon de convergence de S ?
c) Calculer $S(z)$ pour $|z| < 1/2$ et en déduire une expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

892. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n + (-1)^n$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 2^n$.
b) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Calculer f sur un voisinage de 0 et en déduire u_n.

893. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite telle que $a_0 = 1$ et, pour tout n, $2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.
a) Montrer que, pour tout n, $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{n!}{2^n}$. En déduire que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ est strictement positif.
b) Calculer la somme de la série précédente et en déduire la valeur de a_n.

894. Une involution de $[\![1,n]\!]$ est une application $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $f \circ f = \text{id}$. On note I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. On pose $I_0 = 1$.
a) Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.
b) Montrer que le rayon de convergence de S est $\geqslant 1$.
c) Établir une équation différentielle vérifiée par S.
d) En déduire S puis une expression de I_n.

895. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Ainsi $B_0 = B_1 = 1$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.
b) Montrer que le rayon de convergence R de f est > 0.
c) Trouver une équation différentielle linéaire vérifiée par f sur $]-R, R[$.
d) En déduire $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$, puis une expression de B_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

896. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\, dt$.
a) Justifier la définition de u_n.
b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$.
c) Étudier la convergence en R et en $-R$.

897. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^n$. On suppose que la série entière $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et qu'il existe P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ non nuls tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, on ait $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que, pour n assez grand, le déterminant de la matrice $(a_{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est nul.

898. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. On note R le rayon de convergence de la série entière, que l'on suppose strictement positif.
a) Exprimer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.
b) Donner une expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
c) Préciser R.

899. Déterminer un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx} \cos x}{\sqrt{x}}\, dx$.

900. On pose, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx + x\sqrt{x}}$. Montrer que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, et déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n$.

901. On pose $G : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+x)}\, dt$.
a) Montrer que G est définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.
b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $y \mapsto G(x, y)$ admet une limite finie, notée $G(x)$, quand y tend vers $+\infty$.
c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $G(n, y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\, dt - \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\, dt\right)$.
d) On pose $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$ converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.

902. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\, dt$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.
b) Donner une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.

903. Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$.
a) Montrer que Γ est définie ur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.
c) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Donner une expression intégrale de $\Gamma'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

904. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

a) Trouver le domaine de définition de f.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
c) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
d) Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

905. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression simple de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$.

906. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^{+*})$. On pose $F : a \in \mathbb{R}^+ \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)^a\, dt$.
a) Montrer que F est dérivable. Calculer $F'(0)$.
b) Déterminer la limite de $a \mapsto (F(a))^{1/a}$ lorsque $a \to 0^+$.

907. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\, dt$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
c) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

908. Développer en série entière au voisinage de l'origine $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt$.

909. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, \ln(1-x)\, dx$ et $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.
Montrer que $I = S$.

910. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\, dt$ et calculer sa somme.

911. Soit $s > 1$. Justifier l'écriture :
$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1}\right) dt = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt\right).$$

912. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}(t)}\, dt$ et de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+2n}{x^2 + (1+2n)^2}$. Montrer que $I = 2S$.

913. *a)* Étudier la convergence de $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2te^{-(2n+1)t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\, dt$ et la calculer.

914. *a)* Montrer que $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
b) Montrer l'existence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^2 e^{-nu^2}\, du$ et la calculer.
c) Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\, dt$. Justifier l'existence de I. Montrer que $I = \displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

915. *a)* On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.
b) Pour $t \geqslant 0$, on pose $S(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{-kt}}{k}$. Montrer que S est bien définie, et calculer $S(t)$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
c) Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-t})\, dt$ et calculer I.

916. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx$.
a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Exprimer $F(a)$ comme la somme d'une série.

917. Soient $\alpha > 0$, (E) l'équation différentielle $xy' + \alpha y = \dfrac{1}{1+x}$ et $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\, dt$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$.
b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que (E) possède une unique solution prolongeable par continuité en 0.
c) L'équation différentielle (E) possède-t-elle des solutions développables en série entière au voisinage de l'origine ?

918. Déterminer les fonctions y développables en série entière autour de 0 solutions de l'équation différentielle $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' - y = 0$.

919. Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de l'origine de l'équation différentielle $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

920. *a)* Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telles que $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telles que $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{y}\sqrt{x^3+y^3}$.

921. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
On note $g(u, v) = f(x, y)$ où $u = x + \alpha y$ et $v = x + \beta y$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq \beta$.
a) Déterminer une équation aux dérivées partielles (E) vérifiée par g.
b) Préciser à quelle condition sur (a, b, c), il existe (α, β) pour lequel g vérifie l'une des équations aux dérivées partielles suivantes :
i) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$, ***ii)*** $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$, ***iii)*** $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.

922. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(f(t), f'(t))$ est liée et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \neq 0$.
On pose $g : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{f(t)}{\|f(t)\|}$.
a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer, pour $t \in \mathbb{R}$, que $g'(t)$ est colinéaire et orthogonal à $f(t)$.
b) En déduire l'existence de $e \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \in \mathbb{R}e$.
c) Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \neq 0$?

Géométrie

923. Soient $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $r > 0$ et A un point de $\mathcal{C}$. On note Σ l'ensemble des projetés orthogonaux de A sur les droites tangentes à $\mathcal{C}$. Étudier Σ. Faire un dessin.

Probabilités

924. $^\diamond$ Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose que $\mathbf{P}(A) = \dfrac{3}{5}$, $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{1}{4}$. Exprimer $\mathbf{P}_B(A)$ en fonction de $\mathbf{P}_{\overline{B}}(\overline{A})$.

925. $^\diamond$ On suppose que n couples se rencontrent et se serrent la main. Chaque personne serre la main de toutes les autres sauf celle de son conjoint. Combien y a-t-il de poignées de mains échangées ?

926. $^\diamond$ Une urne contient p boules rouges et q boules vertes. On tire sans remise les boules, on s'arrête lorsqu'on a tiré toutes les boules vertes. Déterminer la probabilité d'avoir retiré toutes les boules.

927. $^\diamond$ Une urne contient n boules rouges et n boules blanches. On tire les boules deux par deux jusqu'à ce que l'urne soit vide. Déterminer la probabilité de tirer à chaque étape une boule rouge et une boule blanche.

928. $^\diamond$ Soient A et B deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$, indépendantes et de loi uniforme. Calculer $\mathbf{P}(A \subset B)$.

929. Un opérateur téléphonique doit contacter n personnes. À chaque appel, il y a une probabilité p que le contact se fasse. Les appels sont réalisés indépendamment. Il appelle les n personnes ; on note X_1 le nombre de personnes contactées. Il rappelle ensuite les $n - X_1$ personnes n'ayant pas répondu la première fois ; on note X_2 le nombre de personnes ayant répondu au deuxième appel. L'opérateur recommence jusqu'à ce qu'il ait contacté les n personnes. On note X_k le nombre de personnes ayant répondu au k-ième appel. Déterminer la loi de X_1, la loi de X_2, la loi de $X_1 + \cdots + X_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

930. Soient n et a dans $\mathbb{N}^*$. On pose $N = na$. On place indépendamment N boules dans n urnes, chaque placement se faisant selon la loi uniforme. On note T_i la variable prenant la valeur 1 si l'urne i est vide, et 0 sinon. On note Y_n le nombre d'urnes vides, et l'on pose $S_n = \dfrac{Y_n}{n}$. Déterminer la loi des T_i, $\mathbf{E}(S_n)$ et la limite de $(\mathbf{E}(S_n))$.

931. On se donne une variable aléatoire σ suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n. On note X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement $\sigma(i) = i$ et Y la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes de σ.
a) Donner la loi et l'espérance de X_i.
b) Donner l'espérance de Y.
c) Calculer $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$.
d) En déduire la variance de Y.

932. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X (resp. Y) suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (resp. $q \in]0, 1[$). Déterminer $\mathbf{P}(X < Y)$.

933. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \ldots, 2n\}$. On dispose de $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$, réparties dans deux urnes. La première urne contient initialement r boules, la seconde $2n - r$. À chaque étape, on choisit une boule au hasard et on la change d'urne. On pose $X_0 = r$ et, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note X_p le nombre de boules dans la première urne après p étapes.
a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_1.
b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Exprimer la loi de X_{p+1} en fonction de celle de X_p.
c) En déduire une relation de récurrence entre les fonctions génératrices G_{X_p}.
d) Déterminer une expression de $\mathbf{E}(X_p)$ et la limite de $(\mathbf{E}(X_p))_{p \geqslant 0}$.

934. $^\diamond$ Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient $(n-1)$ boules blanches et une boule noire. On y effectue des tirages successifs. Aux rangs impairs, on effectue un tirage sans remise ; aux rangs pairs, on effectue un tirage avec remise. On note N le nombre de tirages effectués, sachant que l'on s'arrête lorsque l'urne est vide.
Pour $k \in \{1, \ldots, N\}$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au k-ième tirage est noire, à 0 sinon. Enfin on pose $S = X_1 + \cdots + X_N$.
a) Déterminer N. Déterminer le nombre de boules dans l'urne avant le $(2j + 1)$-ième tirage, avant la $(2j)$-ième tirage.
b) Calculer $\mathbf{P}(X_{2j+1} = 1)$, $\mathbf{P}(X_{2j} = 1)$.
c) Déterminer l'espérance de S.

935. $^{\diamond\star}$ Soient A et B deux événements indépendants de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On pose $Z = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.
a) Déterminer $Z(\Omega)$.
b) Montrer qu'il existe $k \in Z(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Z = k) \geqslant 4/9$.

936. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y relative à l'événement $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Déterminer la loi de Y.

937. Un joueur lance simultanément N dés équilibrés. Il relance les dés qui n'ont pas donné 6. On note S_n le nombre de 6 obtenus jusqu'au n-ième lancer.
a) Montrer que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b) Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(S_n = N)\right) = 1$.
c) On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = N\}$. Déterminer la loi de T. Montrer que T admet une espérance. Calculer $\mathbf{E}(T)$ pour $N = 5$.

938. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X = k) = -(n+1)\mathbf{P}(X > n) + \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(X > k)$.
b) On suppose que X est d'espérance finie. En déduire une expression de $\mathbf{E}(X)$ ne faisant intervenir que les $\mathbf{P}(X > k)$.
c) On suppose réciproquement que la série de terme général $\mathbf{P}(X > n)$ converge. Montrer que X est d'espérance finie.
d) Calculer $\mathbf{E}(X)$ lorsque X suit une loi géométrique de paramètre p.

939. Le nombre d'œufs pondus par une poule suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf éclot de façon indépendante avec une probabilité $p \in]0,1[$. Déterminer la loi du nombre K d'œufs qui éclosent.

940. Soient $n \geqslant 2$ et $N = n!$. On pose $N = p_1^{r_1} \times \cdots \times p_m^{r_m}$ où les r_i sont dans $\mathbb{N}^*$ et les p_i des nombres premiers distincts. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$.
a) Montrer que les événements $(p_k \mid X_1)$, pour $1 \leqslant k \leqslant m$, sont mutuellement indépendants.
b) Soit $k \in \{1, \ldots, m\}$. Calculer $\mathbf{P}\left((p_k \mid X_1) \cap (p_k \mid X_2)\right)$.

941. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soient $s > 1$ et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.
a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(\lambda n^{-s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
On munit dans la suite $\mathbb{N}^*$ de cette distribution de probabilité.
b) Pour $p \in \mathcal{P}$, soit $A_p = p\mathbb{N}^*$. Montrer que les événements A_p, $p \in \mathcal{P}$, sont mutuellement indépendants.
c) En déduire que $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$.

942. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T \geqslant n) > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \mathbf{P}(T = n \mid T \geqslant n)$. On dit que (θ_n) est un taux de pannes.
a) Montrer que les θ_n sont dans $[0,1[$.

b) Exprimer $\mathbf{P}(T \geqslant n)$ en fonction des θ_k. Montrer que la série $\sum \theta_n$ diverge.
c) Réciproquement, si (θ_n) est une suite d'éléments de $[0,1[$ telle que la série $\sum \theta_n$ diverge, montrer qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{P}(T \geqslant n) > 0$ et $\mathbf{P}(T = n \mid T \geqslant n) = \theta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

943. Soit (X_n) une suite de variables i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
a) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n.
b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de S_n.
c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Centrale - MP

Algèbre

944. $^\diamond$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 2$.
a) On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$ et on considère x tel que $P'(x) = 0$ et $P(x) \neq 0$. En utilisant $\frac{P'}{P}$, montrer que $P''(x)P(x) < 0$.
b) Soient x_1 et x_2 deux racines consécutives de P. Montrer que $P'(x_1)P'(x_2) \leqslant 0$.
c) Soient $a < b$ tels que $P - a$ et $P - b$ sont scindés. Montrer que P' est scindé à racines simples.

945. $^\diamond$ Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, soit $Z(P)$ l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$. Soient P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ non constants tels que $Z(P) = Z(Q)$ et $Z(P-1) = Z(Q-1)$. Montrer que $P = Q$.

946. $^\diamond$ Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ et ψ des formes linéaires sur E. On suppose $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ libre.
a) Montrer que ψ appartient au sous-espace de E^* engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ si et seulement si $\bigcap_{k=1}^{p}\operatorname{Ker}\varphi_k \subset \operatorname{Ker}\psi$
b) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que les conditions de la question précédente équivalent à l'existence de $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |\psi(x)| \leqslant C \max_{1\leqslant k\leqslant p}|\varphi_k(x)|$.

947. $^\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $\operatorname{Com}(M)$ la comatrice de M.
a) Soit $r \in \{0, \ldots, n\}$. Déterminer la comatrice de J_r^n, la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant r coefficients égaux à 1 puis uniquement des coefficients nuls sur la diagonale.
b) Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\operatorname{Com}(AB) = \operatorname{Com}(A)\operatorname{Com}(B)$.
c) Pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, quel est le rang de $\operatorname{Com}(M)$?
d) L'application Com est-elle injective ? Quelle est son image ?

948. $^\diamond$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.