936. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y relative à l'événement $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Déterminer la loi de Y.

937. Un joueur lance simultanément N dés équilibrés. Il relance les dés qui n'ont pas donné 6. On note S_n le nombre de 6 obtenus jusqu'au n-ième lancer.
a) Montrer que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b) Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(S_n = N)\right) = 1$.
c) On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = N\}$. Déterminer la loi de T. Montrer que T admet une espérance. Calculer $\mathbf{E}(T)$ pour $N = 5$.

938. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X = k) = -(n+1)\mathbf{P}(X > n) + \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(X > k)$.
b) On suppose que X est d'espérance finie. En déduire une expression de $\mathbf{E}(X)$ ne faisant intervenir que les $\mathbf{P}(X > k)$.
c) On suppose réciproquement que la série de terme général $\mathbf{P}(X > n)$ converge. Montrer que X est d'espérance finie.
d) Calculer $\mathbf{E}(X)$ lorsque X suit une loi géométrique de paramètre p.

939. Le nombre d'œufs pondus par une poule suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf éclot de façon indépendante avec une probabilité $p \in]0,1[$. Déterminer la loi du nombre K d'œufs qui éclosent.

940. Soient $n \geqslant 2$ et $N = n!$. On pose $N = p_1^{r_1} \times \cdots \times p_m^{r_m}$ où les r_i sont dans $\mathbb{N}^*$ et les p_i des nombres premiers distincts. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1,\ldots,N\}$.
a) Montrer que les événements $(p_k \mid X_1)$, pour $1 \leqslant k \leqslant m$, sont mutuellement indépendants.
b) Soit $k \in \{1,\ldots,m\}$. Calculer $\mathbf{P}\left((p_k \mid X_1) \cap (p_k \mid X_2)\right)$.

941. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soient $s > 1$ et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.
a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(\lambda n^{-s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
On munit dans la suite $\mathbb{N}^*$ de cette distribution de probabilité.
b) Pour $p \in \mathcal{P}$, soit $A_p = p\mathbb{N}^*$. Montrer que les événements A_p, $p \in \mathcal{P}$, sont mutuellement indépendants.
c) En déduire que $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$.

942. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T \geqslant n) > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \mathbf{P}(T = n \mid T \geqslant n)$. On dit que (θ_n) est un taux de pannes.
a) Montrer que les θ_n sont dans $[0,1[$.

b) Exprimer $\mathbf{P}(T \geqslant n)$ en fonction des θ_k. Montrer que la série $\sum\theta_n$ diverge.
c) Réciproquement, si (θ_n) est une suite d'éléments de $[0,1[$ telle que la série $\sum\theta_n$ diverge, montrer qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{P}(T \geqslant n) > 0$ et $\mathbf{P}(T = n \mid T \geqslant n) = \theta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

943. Soit (X_n) une suite de variables i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
a) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n.
b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de S_n.
c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Centrale - MP

Algèbre

944. $^\diamond$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 2$.
a) On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$ et on considère x tel que $P'(x) = 0$ et $P(x) \neq 0$. En utilisant $\frac{P'}{P}$, montrer que $P''(x)P(x) < 0$.
b) Soient x_1 et x_2 deux racines consécutives de P. Montrer que $P'(x_1)P'(x_2) \leqslant 0$.
c) Soient $a < b$ tels que $P - a$ et $P - b$ sont scindés. Montrer que P' est scindé à racines simples.

945. $^\diamond$ Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, soit $Z(P)$ l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$. Soient P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ non constants tels que $Z(P) = Z(Q)$ et $Z(P-1) = Z(Q-1)$. Montrer que $P = Q$.

946. $^\diamond$ Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$. Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ et ψ des formes linéaires sur E. On suppose $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ libre.
a) Montrer que ψ appartient au sous-espace de E^* engendré par $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ si et seulement si $\bigcap_{k=1}^{p}\operatorname{Ker}\varphi_k \subset \operatorname{Ker}\psi$
b) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que les conditions de la question précédente équivalent à l'existence de $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |\psi(x)| \leqslant C \max_{1\leqslant k\leqslant p}|\varphi_k(x)|$.

947. $^\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $\operatorname{Com}(M)$ la comatrice de M.
a) Soit $r \in \{0,\ldots,n\}$. Déterminer la comatrice de J_r^n, la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant r coefficients égaux à 1 puis uniquement des coefficients nuls sur la diagonale.
b) Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\operatorname{Com}(AB) = \operatorname{Com}(A)\operatorname{Com}(B)$.
c) Pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, quel est le rang de $\operatorname{Com}(M)$?
d) L'application Com est-elle injective ? Quelle est son image ?

948. $^\diamond$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $I_n - \mu A$ est inversible.
b) On suppose que $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{rg}(f(M)) = \mathrm{rg}(M)$.

949. Soient $n \geqslant 2$ un entier et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $d_n(\mathbb{K})$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.
a) Que dire du spectre réel d'une matrice antisymétrique rélle ? Dans le cas où n est impair, peut-on être plus précis ?
b) Déterminer $d_n(\mathbb{R})$.
c) Déterminer $d_2(\mathbb{C})$.

950. PYTHON. Pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, soit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3a+2b & -4a-b & 2a \\ 2a+b & -3a-b & 2a \\ b & -b & a \end{pmatrix}$.
On définit $E = \{M_{a,b} \; ; \; (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $R_n = \{M \in E \; ; \; M^n = I_3\}$.
a) Calculer $M_{1,0}M_{0,1}$, $M_{0,1}M_{1,0}$, ${M_{0,1}}^2$ et ${M_{1,0}}^2$.
b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Est-ce une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
c) Déterminer R_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
d) Trouver $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}M_{1,0}P$ soit diagonale et $P^{-1}M_{1,0}P$ triangulaire supérieure.
e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, calculer $P{M_{a,b}}^n P^{-1}$ et retrouver R_n.

951. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, L_A et C_A les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), L_A(M) = AM, C_A(M) = AM - MA$.
a) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que L_A et C_A sont diagonalisables.
b) Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $P(C_A)(M) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k A^k M \frac{P^{(k)}(A)}{k!}$.
c) Montrer que, si C_A est diagonalisable, il en est de même de A.

952. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{ij} = i$ si $j = i+1$, $m_{i,j} = n-i+1$ si $j = i-1$, $m_{i,j} = 0$ sinon.
a) Dessiner M.
b) Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dont M est la matrice dans la base canonique.
c) Déterminer le rang de M et son spectre.

953. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Comparer les spectres de B et ${}^tB$. En déduire que, si A et B ont une valeur propre commune, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AC = CB$.
b) On suppose qu'il existe il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AC = CB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.
c) Soit $r \in \{1, \ldots, n\}$. On suppose qu'il existe il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r telle que $AC = CB$. Montrer que $\chi_A \wedge \chi_B$ est de degré supérieur ou égal à r.
d) Étudier la réciproque de la question précédente.

954. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice de nilpotence d.
i) Montrer que $d \leqslant n$.
i) Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible, formuler son inverse.
b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$.
i) Montrer que $|\operatorname{tr}(M)| \leqslant n$.
ii) Étudier le cas d'égalité.
iii) Étudier le cas $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

955. Pour $R > 0$, soit $B_R = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| < R\}$.
a) Déterminer le rayon de convergence r de la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$. On note f la somme de cette série entière.
b) Pour $z \in B_1$, calculer $\exp(f(z))$. On pourra considérer $t \in [0,1] \mapsto \exp(f(tz))$.
c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Établir l'existence de $\alpha > 0$ tel que
$$\forall z \in B_\alpha, \; \det(I_n + zA) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\operatorname{tr}(A^k)}{k} z^k\right).$$
d) Déduire de la question précédente une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \; \operatorname{tr}(A^k) = 0$.

956. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}, \operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k)$.
a) Les matrices A et B sont-elles semblables ?
b) Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

957. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres (complexes) sont de module au plus 1.
a) Montrer que $\chi_A \in \mathbb{Z}[X]$ et que $\operatorname{tr}(A^k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que les valeurs propres non nulles de A sont de module 1, puis que ce sont des racines de l'unité.
c) Exhiber $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont l'ensemble des valeurs propres est $\mathbb{U}_n$.

958. PYTHON. Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} |t| \, P(t)\, Q(t) \, \mathrm{d}t$.
a) Montrer que φ est un produit scalaire.
b) Programmer une fonction `phi(P,Q)` renvoyant $\varphi(P,Q)$.
c) Montrer qu'il existe une unique suite orthonormale $(P_n)_{n\geqslant 0}$ telle que, pour tout n, P_n soit de degré n à coefficient dominant positif.
d) Programmer une fonction retournant P_n. Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3, P_4. Tracer les graphes des fonctions polynomiales associées sur $[-1,1]$.
e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont dans $]-1,1[$.
f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n séparent celles de P_{n+1}.

959. Soit $(E, (\ | \ ))$ un espace euclidien ; soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall(x,y) \in E^2$, $(u(x)|y) = (x|v(y))$. On le notera u^*.
b) Montrer que tout endomorphisme trigonalisable de E est trigonalisable en base orthonormée.
b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $u^* \in \mathbb{R}[u]$. Que peut-on dire si $u^* \notin \mathbb{R}[u]$?

960. *a)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n(\mathbb{R})$. À quelle condition sur le spectre de A est-il vrai que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0$? On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
b) Soient $n \geqslant 2$ un entier, $p \in \{1,\ldots,n-1\}$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On écrit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ {}^tC & D \end{pmatrix}$.
Montrer que $\det(B) > 0$, puis que $\det(A) \leqslant \det(B)\det(D)$.

961. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, soit f_S l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $f_S(X) = {}^tXSX$.
On note $\mathcal{R} = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ ; \ {}^tXX = {}^tYY = 1, \ {}^tXY = 0\}$.
a) Énoncer le théorème spectral.
b) Soit S une matrice diagonale réelle. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $f_S(X)$.
c) Soient $S \in S_n(\mathbb{R})$, X et Y dans $\mathbb{R}^n$. Exprimer ${}^tXSY$ en utilisant f_S.
d) On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f comptées avec multiplicités. Montrer que $2\sup\{|{}^tXSY| \ ; \ (X,Y) \in \mathcal{R}\} = \lambda_n - \lambda_1$.

Analyse

962. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que, pour tout $g \in G$, il existe un voisinage V de g dans $\mathbb{C}^*$ tel que $V \cap G = \{g\}$.
a) Montrer que, pour tout compact K de $\mathbb{C}^*$, $G \cap K$ est fini.
b) Montrer que $G \cap \mathbb{U}$ est cyclique.
c) On suppose que G n'est pas contenu dans $\mathbb{U}$. Soit $\Lambda = \{z \in G, \ |z| > 1\}$. Montrer que Λ admet un plus petit élément. En déduire G.

963. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire canonique et de la norme associée notée $\| \ \|$.
a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\| \ \|B\|$.
b) On fixe $A \in E$. Pour $M \in E$, soit $f(M) = 2M - MAM$. La suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie par $M_0 \in E$ et $\forall k \in \mathbb{N}, M_{k+1} = f(M_k)$. Montrer que, si $\|I_n - AM_0\| < 1$, alors A est inversible et $M_k \to A^{-1}$.

964. Soient E et F deux espaces normés réels de dimension finie, f une application continue de E dans F. On dit que f est propre si, pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.
a) On suppose que f est propre. Montrer que l'image par f d'un fermé de E est un fermé de F.
b) Montrer que f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

965. ° PYTHON. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.
a) Calculer u_n pour $n \leqslant 1$, représenter u_n pour $n \leqslant 100$. Que peut-on conjecturer ?
b) Démontrer la conjecture précédente.
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}} = \frac{nu_n}{2}$.

966. PYTHON. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note s_n la sommes des chiffres de n (en base 10) et t_n le nombre de 0 terminant l'écriture décimale de n.
a) Écrire deux fonctions en PYTHON renvoyant s_n et t_n. Tracer $\sum t_n x^n$ et $\sum s_n x^n$ pour $x \in \left[-\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\right]$ en tronquant la somme à l'ordre 10,20,100,...
b) Montrer que $\sum s_n x^n$ et $\sum t_n x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1.
c) Calculer la somme de chacune de ces deux séries.

967. PYTHON. Soit $(a_n)_{n\geqslant1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\sum a_n$ converge. On pose $R_n = \sum_{k\geqslant n+1} a_k$.
a) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n^2}$. En approchant R_n par la somme des 100 premiers termes, tracer sur un même graphe les séries $\sum a_n, \sum \frac{a_{n+1}}{R_n}, \sum \frac{a_{n+1}}{\sqrt{R_n}}$.
b) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_{n+1}}{\sqrt{R_n}} \leqslant 2\left(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}}\right)$. Nature de $\frac{a_{n+1}}{\sqrt{R_n}}$?
c) Montrer que, si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant m$, $\frac{a_{m+1}}{R_m} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{R_n} \geqslant 1 - \frac{R_{n+1}}{R_m}$.
Nature de $\sum \frac{a_{n+1}}{R_n}$?
d) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [1/2, 1]$ tel que pour $\beta < \alpha$, $\sum \frac{a_{n+1}}{R_n^\beta}$ converge, et pour $\beta > \alpha$, $\sum \frac{a_{n+1}}{R_n^\beta}$ diverge.
e) Trouver α pour $a_n = \frac{1}{n^2}$ et pour $a_n = c^n$ avec $c \in]0,1[$.

968. ★ Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$. On suppose que $a_n S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
a) Montrer que $\sum a_k^2$ diverge.
b) Donner un équivalent de a_n.

969. *a)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geqslant1}$ converge.

b) Déduire de la question précédente la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

c) On pose, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n}$.

970. Si $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie $u_0 = 0$, soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n(u_n - u_{n-1})$. On note $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) la propriété : $\sum v_n$ converge (resp. il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \ell$ et $\sum (\ell - u_n)$ converge).

a) On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \operatorname{Arctan}(n^\alpha)$. Étudier $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

b) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge et que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) Comparer les propriétés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

971. $^\diamond$ PYTHON. On définit deux suites en posant : $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n}$, $y_{n+1} = \sqrt{7 + y_n}$.

a) Montrer que les suites $(x_n)_n$ et (y_n) sont bien définies.

b) Calculer avec Python les 20 premiers termes de ces suites et conjecturer leur limite.

c) On suppose que (x_n) et (y_n) convergent; calculer leur limite.

d) On pose $K = \left[0, \sqrt{7}\right] \times \left[0, \sqrt{7+\sqrt{7}}\right]$, et on définit $f : \begin{cases} R & \to K \\ (x,y) & \mapsto (\sqrt{7-y}, \sqrt{7+x}) \end{cases}$

Montrer que φ est k-lipschitzienne, avec $k < 1$, pour la norme $\|.\|_1$.

e) Déterminer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|l_x - x_n| \leqslant 10^{-3}$ et $|l_y - y_n| \leqslant 10^{-3}$. Vérifier à l'aide de Python.

f) Montrer que les suites ne sont pas monotones.

972. $^\diamond$ Le but de cet exercice est de montrer que π est irrationnel.

a) Soient E un espace vectoriel, u un endomorphisme nilpotent de E. Montrer que $v = \mathrm{id} + u$ est inversible et déterminer v^{-1}.

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q'' + Q = P$. Si P est dans $\mathbb{Z}[X]$ et divisible par X^n, montrer que Q est dans $\mathbb{Z}[X]$ et que $Q(0)$ est divisible par $n!$.

c) On suppose que $\pi = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $P_n = (p - qX)^n$ et Q_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q_n'' + Q_n = P_n$. En considérant $\frac{1}{n!}\int_0^\pi P_n \sin$, démontrer le résultat annoncé.

973. Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On appelle dérivation de E tout endomorphisme δ de E tel que, pour tout $(f,g) \in E^2$, $\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$.

a) Soit δ une dérivation de E. Quelle est l'image d'une fonction constante par δ ?

b) Soit $f \in E$ nulle en 0. Montrer qu'il existe $g \in E$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xg(x)$.

c) Déterminer les dérivations de E.

974. *a)* Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, justifier l'existence de $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} -\ln(1 - e^{-nx})$.

b) Montrer que la série de fonctions de la question précédente converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme sur $]0, +\infty[$?

c) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$, puis un équivalent de f en 0.

975. Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, f une fonction continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,T]$, soit $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(u)\, e^{-kn(t-u)}\, du$.

a) Justifier l'existence de $\varphi_n(t)$.

b) Étudier la convergence simple de $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$.

c) On suppose que la suite $\left(\int_0^T f(u)\, e^{nu}\, du\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée. Montrer que f est la fonction nulle.

976. PYTHON. *a)* Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit deux suites réelles u et v en posant $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + {u_n}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

i) Définir les fonctions $u(n,x)$ et $v(n,x)$ et donner $u(n, 0.3)$ et $v(n, 0.3)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 10$.

ii) Tracer (n, u_n) et (n, v_n) pour différentes valeurs de n et x. Formuler une conjecture.

iii) Étudier la monotonie de u.

iv) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha - v_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

v) Donner un équivalent simple de u_n.

b) On fait maintenant varier x.

i) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}+*$, $\alpha(x) = \ln(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_k(x)}\right)$.

ii) Étudier la monotonie de α.

iii) Montrer que α est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

iv) Tracer $x \in]0, 20[\mapsto \ln(x) + \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_k(x)}\right)$.

977. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

a) Nature de $\sum (-1)^n a_n$.

b) Calculer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

c) Énoncer le théorème d'intégration terme à terme.

d) Calculer la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

e) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

978. ***a)*** Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt$ et étudier le signe de I.
b) Montrer que $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt \to I$.
c) Montrer l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \to \gamma$.
d) Lier γ et I.

979. PYTHON. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note t_n le nombre de 0 à la fin de l'écriture décimale de n et s_n la somme de ses chiffres. Par exemple $t_{1004270} = 1$ et $s_{1004270} = 14$. On note $T(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n z^n$, $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n z^n$.
a) Écrire des fonctions Python renvoyant t_n et s_n.
b) Tracer les sommes partielles de T et S pour $n \in \{10, 20, \dots, 100\}$ sur $\left[-\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\right]$.
Étudier la parité de T.
c) Déterminer le rayon de convergence de T et de S.
d) On considère dans cette question S comme fonction d'une variable réelle. Quelle est sa limite en 1^- ?
e) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $(1 - z)S(z) = -9T(z) + \frac{z}{1-z}$.
f) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $T(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^{10^p}}{1 - z^{10^p}}$.
g) On considère de nouveau S comme fonction d'une variable réelle. Quelle est sa limite en -1^+ ?

980. PYTHON. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}\left(2\sqrt{x}\sin t\right)\,dt$ et $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\left(2\sqrt{-x}\sin t\right)\,dt$.
a) Tracer le graphe de φ sur $[-3, 5]$ et sur $[-1000, 0]$.
b) Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n}\,dt$. Trouver une relation de récurrence entre les K_n. Exprimer K_n pour $n \in \mathbb{N}$.
d) Montrer que φ est somme d'une série entière, que l'on précisera.
e) Montrer que φ est positive sur $[-1, +\infty[$, croissante sur $[-2, +\infty[$, convexe sur $[-3, +\infty[$.

981. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si :
$\forall (a, b) \in U^2, f(b) \geqslant f(a) + \langle \nabla f(a), b - a\rangle$.

Probabilités

982. Soient $s \in]1, +\infty[$ et X une variable aléatoire d'image $\mathbb{N}^*$ suivant la loi $\zeta(s)$:
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$, où on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(n|X)$.
b) Soient $n_1, \dots, n_k$ des nombres deux à deux premiers entre eux. Montrer que les événements $\{n_j|X\}_{1\leqslant j\leqslant k}$ sont mutuellement indépendants.
c) Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangée dans l'ordre croissant.
Montrer que $\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 1/p_n^s} = \zeta(s)$.
d) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

983. $^\diamond$ PYTHON. On appelle N-dé une suite de couples de réels $((r_i, p_i))_{1\leqslant i\leqslant N}$, où $r_i \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{R}^+$, et $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$. Un dé est dit : équilibré si pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $p_i = \frac{1}{N}$, normal si pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $r_i = i$, usuel s'il est normal et équilibré. On dit que la variable aléatoire Y est associée au dé si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{i,\, r_i = k} p_i$.
a) Calculer l'espérance et la variance de Y pour un N-dé.
b) Simuler sur Python un million de lancers du dé :
$((1, 0.45), (2, 0.25), (3, 0.15), (4, 0.10), (5, 0.05))$. Que remarque-t-on ?
c) La somme de dés usuels peut-elle être un dé équilibré ?
d) Comment exprimer un (MN)-dé usuel comme somme d'un N-dé et d'un M-dé tous deux équilibrés.
Ind. Dans les jeux de rôles, on peut utiliser deux dés de 10 pour simuler un dé de 100, l'un des dés représentant les dizaines et l'autre les unités. Comment adapter ce principe ?
e) Peut-on exprimer un dé usuel à 6 faces comme somme de 2 dés normaux ?

984. ***a)*** Montrer que $X^3 - X^2 - X - 1 = (X - a)(X - b)(X - \bar{b})$ avec $a \in]1, 2[$, $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|b| < 1$.
b) On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note p_n la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n-ième lancer. Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n, p_{n+1}, p_{n+2}.
c) Donner une expression et un équivalent de p_n.

985. PYTHON. ***a)*** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/n)$.

i) Si $k \in \mathbb{N}$, montrer que la suite $(\mathbf{P}(X_n = k))_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

ii) Tracer G_{X_n} sur $[0, 1]$ pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.

iii) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $(G_{X_n})_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers G_X sur $[0,1]$. La convergence est-elle uniforme ?
b) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

i) On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(X=k)$. Montrer que $(G_{X_n})_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers G_X sur $[0,1]$.

ii) Établir la réciproque de la propriété précédente.

Centrale - PSI

Algèbre

986. ◊ Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et u, v deux endomorphismes de E.
a) Montrer que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
b) Soit F un sous-espace de E et G, H deux supplémentaires de F dans E. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G et q le projecteur sur H parallèlement à F. Montrer que $\mathrm{rg}(p+q) = \mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q)$.

987. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $\varphi(A) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.
a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum\limits_{j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que pour tout $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'équation $AX = b$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

988. Soient $n \geqslant 1$, $A, B \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose $A(a) \neq 0$. On considère l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P + P(a)A = B\}$ et la fonction $f : P \mapsto P(a)A$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son rang.
b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
c) En utilisant la question précédente, déterminer E.

989. À quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, diagonaliser effectivement A.

990. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que A est diagonalisable et donner un vecteur propre évident de A.
b) Calculer le polynôme caractéristique de A puis en déduire le spectre de A.
c) Exprimer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse A^{-1} en fonction de I_4, A, A^2 et A^3.

991. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.
b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M et M^2 soient semblables.

992. PYTHON Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega_n = e^{2i\pi/n}$ et $F_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $(\omega_n^{(k-1)(l-1)})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$.
a) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie F_n. Afficher plusieurs matrices F_n.
b) Calculer avec Python le produit $F_n\overline{F_n}$.
c) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie F_n^{-1}. Que peut-on conjecturer ?
d) Écrire une fonction Python qui prend deux entiers n et k en arguments et renvoie F_n^k. Que peut-on conjecturer ?
e) Démontrer les conjectures précédentes.
f) Déterminer les valeurs propres de F_n. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

993. PYTHON Soit n un entier naturel. On considère la matrice $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{j-1,j} = j-1$, $a_{j+1,j} = n+1-j$ pour tout j, et dont tous les autres coefficients sont nuls.
a) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie A_{n+1}.
b) Déterminer avec Python les valeurs propres de A_{n+1}. Que peut-on conjecturer ?
c) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à la matrice A_{n+1}. Montrer qu'il existe un polynôme Q ne dépendant pas de n tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = QP' + nXP$.
d) En déduire les éléments propres de u.
e) La matrice A_{n+1} est-elle diagonalisable ?

994. PYTHON On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.
a) Calculer le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Préciser le module de ses valeurs propres.
b) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 8$, $u_3 = 4$, $u_4 = 11$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+5} = \frac{1}{5}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4})$.
i) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et renvoie les $n+1$ premiers termes de cette suite.
ii) Afficher sur un graphique les 25 premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer concernant la convergence de u_n ?
iii) Réécrire la relation de récurrence à l'aide de la matrice A.

iv) Montrer que la suite de matrice $(A^n)_n$ converge vers la matrice d'un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.

v) Trouver un vecteur non nul X tel que ${}^tAX = X$.

995. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $(E_1) : A^4 + I_2 = 0$ et $(E_2) : A^T A = AA^T$. On note u et v les endomorphismes respectivement représentés par A et A^T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) i) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Quelles sont les valeurs propres possibles ?

ii) Montrer que tout vecteur propre de u est vecteur propre de v.

b) Quelles sont les matrices satisfaisant (E_1) et (E_2) ?

996. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $v^2 + v + \mathrm{id}_E = 0$.

a) Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $(x, v(x))$ est une famille libre.

b) Soit $x, y \in E$ tels que $(x, y, v(x))$ soit une famille libre.
Montrer que la famille $(x, y, v(x), v(y))$ est libre.

c) On suppose désormais que $\dim E = 4$. Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E qui vérifie $e_3 = v(e_1)$ et $e_4 = v(e_2)$. Donner la matrice de v dans cette base. Est-elle diagonalisable ?

997. Soit U l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients complexes et φ l'application de U dans U définie par $\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) \mapsto \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k^2)$.

a) L'application φ est-elle injective ? surjective ?

b) Déterminer une condition sur n pour que $\varphi(X^n - 1) = X^n - 1$.

c) i) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

ii) Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

iii) En déduire que si P est à coefficients entiers, alors $\varphi(P)$ l'est également.

998. PYTHON. Soit $G \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n+1$, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. On définit g l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui au polynôme P associe le reste de la division euclidienne de PX par G.

a) Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Dans cette question $n = 3$ et $G = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X = X(X-1)(X+1)(X+2)$.

i) Donner la matrice de g dans la base canonique.

ii) g est-elle diagonalisable ?

iii) Tracer sur $[-3, 2]$ les fonctions polynomiales associées aux vecteurs propres de g.

c) On revient au cas général. L'application g est-elle diagonalisable ?

999. *a)* Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

a) Montrer qu'il existe un entier p tel que $B^p = 0$.

b) Montrer que $BA = 0$.

c) Réciproquement, soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B^n = BA = 0$. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

1000. *a)* Soient M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(M)$ et $P(N)$ sont semblables.

b) Soient A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices semblables à A, convergeant vers une matrice B. Montrer que B est semblable à A.

c) Ce résultat subsiste-t-il si A n'est pas diagonalisable ?

1001. Soit $\theta_1, \dots, \theta_p$ des réels deux à deux distincts modulo 2π et $m_1, \dots, m_p$ des complexes non tous nuls. Le but de l'exercice est de montrer que $(m_1 e^{i\theta_1 n} + \dots + m_p e^{i\theta_p n})$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. On suppose par l'absurde que $m_1 e^{i\theta_1 n} + m_p e^{i\theta_p n} \to 0$.

a) On note $M_n = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1 n} & \dots & e^{i\theta_p n} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\theta_1 (n+p-1)} & \dots & e^{i\theta_p (n+p-1)} \end{pmatrix}$. Montrer que $Y_n = M_n \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

b) Montrer que $|\det M_n|$ est une constante non nulle.

c) À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, exprimer M_n^{-1} et trouver une contradiction.

1002. PYTHON. Une matrice carrée est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et si la somme de ses coefficients sur chaque ligne vaut 1.

a) Écrire une fonction Python `stoch(N)` qui renvoie une matrice de taille N stochastique avec des coefficients aléatoires.

b) Une matrice stochastique A est dite semi-vide si $a_{i,j} = 0$ quand $i + j$ est pair. Écrire une fonction Python `stoch2(N)` renvoyant une telle matrice.

c) Écrire une fonction Python `tracevp(A)` qui trace les valeurs propres de A. Que remarquez-vous ?

d) Soit A une matrice stochastique semi-vide. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $\overline{\lambda}$ et $-\lambda$ aussi.

1003. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$.

a) Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $B_k = X^k/k!$. La famille $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$ est-elle une base orthonormée de E ?

c) Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(t) = t^k e^{-t}$ et $L_k(t) = \dfrac{(-1)^k}{k!} e^t f_k^{(k)}(t)$. Prouver que L_k est une fonction polynomiale, donner son degré et ses coefficients.

d) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de E.

e) Exprimer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{L}$.

1004. Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une contraction lorsque : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

a) Montrer qu'un endomorphisme symétrique f est une contraction si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(f) \subset [-1, 1]$.

b) Montrer que si f est un endomorphisme symétrique alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $x \in E$, on a $\|P(f)(x)\| \leqslant \|x\| \sup_{a \in \mathrm{Sp}(f)} |P(a)|$.

1005. *a)* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $I_n + M$ est inversible. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $(I_n + M)^{-1} = P(M)$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles.

1006. *a)* Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit diagonalisable dans une base orthonormale.
b) Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ est-elle trigonalisable dans une base orthonormale ?

1007. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^{2019} = B^{2019}$.
a) Montrer que A et A^{2019} sont diagonalisables ; quel lien y a-t-il entre leurs valeurs propres ?
b) Montrer que $A = B$.
c) Si $A^2 = B^2$, a-t-on nécessairement $A = B$?

Analyse

1008. ★ Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
a) Montrer que les boules de E sont convexes.
b) Soit C une partie convexe de E. On suppose que C est dense dans E. Montrer que $C = E$:
i) dans le cas où $E = \mathbb{R}$; *ii)* dans le cas général.

1009. PYTHON. On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \displaystyle\int_0^1 |x - ty| \, dt$.
a) Vérifier que N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
b) Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto N(x, 1)$ pour $x \in [-1/2, 3/2]$ avec Python.
c) Calculer $N(x, 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
d) En déduire la valeur de $N(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
e) Soit C le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Tracer la courbe de $x \mapsto N\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right)$ pour $x \in [-1, 1]$ avec Python. Estimer les valeurs de $\sup N(C)$ et $\inf N(C)$ à l'aide du tracé.
f) Déterminer la valeur exacte de $\sup N(C)$.

1010. Pour tous entiers naturels non nuls n et p, on pose $L_p(n) = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{np} \frac{1}{k}$.
a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la suite $(L_p(n))_p$ converge vers limite notée $L(n)$.
b) Montrer que, pour tous $m, n \geqslant 1$, $L(mn) = L(m) + L(n)$.
c) Montrer que la suite $(L(n))_n$ est strictement croissante.
d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $L(n) = \ln(n)$.

1011. PYTHON Soit $Q : x \mapsto (x-1)(x^2-2)^2$, $f : x \mapsto x - \dfrac{Q(x)}{Q'(x)}$ et enfin $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie les n premiers termes de cette suite. Que peut-on conjecturer sur la limite de cette suite ?
b) Montrer que Q' est scindé à racines simples dans $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. On admet qu'il en est de même pour Q''.
c) Étudier les variations de f.
d) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et trace les points de coordonnées $(k, \ln(u_k - \sqrt{2}))$ pour tout $k \leqslant n$. Que peut-on conjecturer ?
e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n > \sqrt{2}$ tel que $u_{n+1} - \sqrt{2} = f'(c_n)(u_n - \sqrt{2})$.
f) Montrer que la limite de f' en $\sqrt{2}$ par valeurs supérieures est $1/2$.
g) En déduire la preuve de la conjecture précédente.

1012. PYTHON Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = x \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{k}\right)$.
a) i) Définir une fonction `P(n,x)` qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.
ii) Tracer les graphes des $P_n(x)$ pour $x \in [0, 1]$ et n variant de 1 à 10. Qu'observe-t-on ?
iii) Définir une fonction `M(n)` qui renvoie l'abscisse x_n du maximum de P_n sur $[0, 1]$. Pour k allant de 1 à 5, afficher $x_n \ln(n)$ avec $n = 10^k$. Qu'observe-t-on ?
b) i) Montrer que P_n admet un maximum sur $[0, 1]$, atteint en un unique point noté x_n.
ii) En considérant $x \mapsto \ln(P_n(x))$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
iii) Trouver un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

1013. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) \, dx$. Donner le signe de u_n en fonction de n. Montrer que la série $\sum u_n$ converge mais n'est pas absolument convergente.

1014. PYTHON. Pour a réel, on note $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0(a) = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(a) = \arctan\left(\dfrac{u_n(a)}{1 + \sqrt{1 + u_n(a)^2}}\right)$.
a) Écrire une fonction `suite(N, a)` donnant tous les termes $u_n(a)$ pour $n \in [\![0, N]\!]$. Calculer `suite(3, 0)` puis `suite(10, 2.1718)`.
b) Calculer `suite(N, a)` pour $N = 10$ et a appartenant à $[1, 4, 10, 100]$. Faire de même avec $2^n u_n(a)$.
c) Conjecture C_1 : convergence et limite de $(u_n(a))$?
Conjecture C_2 : convergence et limite de $(2^n u_n(a))$?
d) Montrer que pour tout x réel, $|\arctan(x)| \leqslant |x|$. La conjecture C_1 est-elle vraie ?
e) Étudier la convergence des séries de terme général $u_n(a)$, $u_n(a)^2$, $\ln\left(\dfrac{2u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)$.
f) La conjecture C_2 est-elle vraie ?
g) Comparer avec Python $\arctan(x)$ et $2\arctan\left(\dfrac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}\right)$. Démontrer le résultat observé.

1015. PYTHON Soit a, $b > 0$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$.

a) i) Avec Python, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_n$ avec $u_0 = 1$ et $(a, b) \in \{(\frac{1}{2}, 1), (\frac{2}{3}, 1), (\frac{3}{2}, 2), (\frac{5}{3}, 2)\}$. Que peut-on conjecturer ?

ii) Avec Python, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n = 10^6$, $u_0 = 1$ et pour les couples $(a, b) = (1, \frac{7}{6})$, $(1, \frac{5}{3})$, $(1, 2)$, $(1, 3)$. Que peut-on conjecturer ?

b) Soit $\gamma > 0$. On pose, pour tout $n > 0$, $v_n = \ln(n^\gamma u_n)$ et $w_n = u_{n+1} - u_n$.

i) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de w_n.

ii) À quelle condition sur γ la série de terme général w_n converge-t-elle ?

iii) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $u_n \sim cn^{a-b}$.

c) On suppose $b - a > 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n$. Montrer que la série de terme général z_n converge et calculer sa somme.

1016. PYTHON Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $u_0 = 1$, $u_1 = a_1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = a_{n-1}u_{n-1} + u_{n-2}$. On étudie la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n-1}}$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

a) Écrire une fonction qui prend en entrée les p premières valeurs de la suite (a_n) et retourne les p premières valeurs de (u_n).

b) Écrire une fonction qui prend en entrée les p premières valeurs de (a_n) et qui calcule S_p.

c) Tracer la ligne brisée reliant les points (n, S_n) pour $1 \leqslant n \leqslant 20$, lorsque la suite (a_n) est respectivement donnée par :

i) $a_n = 1/2^n$ *ii)* $a_n = 1/n^2$ *iii)* $a_n = 1/\sqrt{n}$ *iv)* $a_n = 1$.

Faire une conjecture sur le comportement de la série de terme général v_n.

d) On suppose que la série de terme général a_n converge. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

e) On suppose maintenant que la série de terme général a_n diverge. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

Ind. On pourra étudier la nature de la série de terme général $u_{n-1}(u_n - u_{n-2})$.

1017. PYTHON On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\omega^n}{n}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) La suite $(S_n)_n$ semble-t-elle converger ? Si oui, donner une approximation de sa limite S.

b) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\omega - t}{1 + t + t^2}\, dt$. Justifier l'existence de I. Par la méthode des rectangles, trouver une valeur approchée de I.

c) Comparer I à S, que peut-on conjecturer ? Démontrer cette conjecture.

d) Donner la valeur exacte de I.

e) On considère une suite de complexes $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 3-périodique. On pose alors $u_n = a_n/n$ et $z_n = u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

1018. *a)* Montrer la divergence de la série harmonique et donner un équivalent de la n-ième somme partielle.

b) Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs strictement positives et α un réel > 0. On pose, pour tout n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que $(S_n)_n$ diverge. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

c) On suppose maintenant que S_n converge vers S et on note $R_n = S - S_n$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

1019. *a)* On considère une suite (u_n) de limite nulle et p un entier naturel non nul. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_{np+k}$. Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature et, que si elles convergent, elles ont la même somme.

b) Montrer que la série de terme général $(-1)^n/(n+1)$ converge.

c) Montrer que la série de terme général $j^n/(n+1)$ converge et calculer sa somme.

1020. PYTHON. Soit $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polynôme à coefficients réels de degré $n \geqslant 1$. On pose, pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $M(x, t) = |P(x)| - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} t^k$.

a) Justifier que pour tout réel x, l'application $t \mapsto M(x, t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$; en déduire qu'il existe un unique réel positif t tel que $M(x, t) = 0$. On note ce réel $m(x)$.

b) Dans cette question on prend $P = X^2 - 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(x) = \sqrt{x^2 + |x^2 - 1|} - |x|$. Étudier la régularité de m.

c) Dans cette question on prend $P = (X-1)(X-2)(X-3)$. Écrire une fonction en Python qui prend en argument x et renvoie $m(x)$ à la précision 10^{-5}.

On pourra utiliser la fonction `bisect` *du module optimize de scipy;* `bisect` *prend trois arguments : une fonction h à une variable, dont on cherche un zéro, et deux réels a et b qui sont les bornes de l'intervalle où l'on cherche le zéro.*

Tracer le graphe de m.

1021. PYTHON. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.

a) i) Représenter graphiquement f sur $[-2, 2]$.

ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = f(x)\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}$. Donner P_n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

iii) La fonction f est-elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$? Est-elle développable en série entière ?

b) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)f(1-x)$ et $h(x) = \alpha^{-1}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, avec $\alpha = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. Tracer g et h sur un intervalle convenable. Sont-elles C^∞ ?

c) Construire une fonction φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geqslant 1$ et $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leqslant 1/2$.

1022. PYTHON Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, dont aucune racine n'est de module 1.

a) Justifier l'existence de $M(P) = \int_0^{2\pi} \ln\left|P\left(e^{it}\right)\right|\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer qu'il existe un réel A, un entier naturel s supérieur ou égal à 1, des complexes $z_1, \ldots, z_s$ de modules différents de 1 et des entiers m_k tels que :

$$M(P) = A + \sum_{k=1}^{s} m_k M\left(X - z_k\right).$$

c) Écrire une fonction `malher(r,theta)` renvoyant la valeur de $M(X - re^{i\theta})$. Quelle est la valeur de $M(2, 50)$? Pour $r \in \{0.5, 1, 100, 2019\}$ représenter la fonction $\theta \mapsto \text{malher}(r,\theta)$ avec un pas de 0.1 pour θ. Que peut-on conjecturer ?

d) Représenter $r \mapsto \text{malher}(r,\theta)$ pour r variant de 0 à 3 avec un pas de 0.1 ; puis $r \mapsto \text{malher}(r,\theta)$ pour r variant de 1 à 20 avec un pas de 0.1. Représenter sur un même graphique $r \mapsto 2\pi\ln(r)$. Que peut-on conjecturer ?

e) Démontrer la conjecture faite à la question ***c)***.

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $X^{2n} - 1 = (X^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + X^2\right)$.

g) Montrer la conjecture de la question ***d)***.

1023. PYTHON Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$, on pose $\theta_n(x) = \prod_{k=0}^{n}\left(1 - x^{2^k}\right)$.

a) Créer une fonction `dessin(n)` qui trace les graphes des θ_k sur $[-1, 1]$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

b) Établir la convergence sur $]-1, 1[$ de la suite (θ_n) vers une fonction θ ; montrer que θ est continue sur $]-1, 1[$, vérifie $\theta(x) = (1-x)\theta\left(x^2\right)$ pour tout $x \in]-1, 1[$ et ne s'annule pas sur $]-1, 1[$.

c) Trouver toutes les fonctions f continues de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = (1-x)f\left(x^2\right)$.

d) On admet que θ est développable en série entière : $\theta(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Donner a_0 et montrer que $a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = -a_n$ pour tout n.

e) Créer une fonction `coeff(n)` qui calcule a_n.

1024. PYTHON Soit $E = \{f \in C^0([0, 1]) \mid f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$. Pour toute fonction $f \in E$, on définit $g = \varphi(f)$ par : $g(x) = f(3x)/2$ si $0 \leqslant x \leqslant 1/3$, $g(x) = 1/2$ si $1/3 < x < 2/3$ et $g(x) = \frac{1}{2}(1 + f(3x-2))$ si $2/3 \leqslant x \leqslant 1$.

a) Montrer que $g \in E$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^n(f) \in E$ (où $\varphi^n = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$).

b) i) Écrire une fonction en python qui renvoie $\varphi(f)$.

ii) Écrire une fonction `iter(n,f)` qui renvoie $\varphi^n(f)$.

iii) Tracer les courbes des fonctions $\varphi^n(f)$ pour les premières valeurs de n et $f : x \mapsto x$.

iv) Même question avec $f : x \mapsto \sin(\pi x/2)^2$. Que peut-on remarquer ?

c) Montrer que φ est 1/2-lipschitzienne.

d) Montrer que la série $\sum(\varphi^{n+1}(f) - \varphi^n(f))$ est normalement convergente. En déduire la convergence uniforme de la suite $(\varphi^n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

e) Montrer que la limite de cette suite ne dépend pas de la fonction f. On la note f_∞.

f) Montrer que f_∞ est l'unique fonction de E qui vérifie $\varphi(f_\infty) = f_\infty$.

1025. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

a) Montrer que, pour tout n, $u_n > 0$.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(n^{b-a}u_n)$.

i) Étudier la convergence de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$.

ii) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général u_n converge. On supposera dans la suite de l'exercice que cette condition satisfaite.

c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficients u_n.

d) On note f la somme de la série entière précédente. Calculer $f(1)$.

1026. ***a)*** Donner le développement en série entière de la fonction exponentielle. Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et nulle en dehors d'un segment. Montrer l'existence de $g : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{tz}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que g est développable en série entière.

1027. PYTHON ***a)*** Écrire un fonction qui prend en entrée un entier n et retourne une valeur approchée de $I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

c) On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} I_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k}{k}$. Représenter les suites (s_n) et (S_n) pour n compris entre 1 et 100. Conjectures ?

d) Prouver ces conjectures et donner la valeur de la somme le cas échéant.

1028. On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

a) On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$.

c) Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\ln(I_n) = \alpha\ln(n) + \beta + o(1)$.
d) Montrer que la série de terme général I_n converge.

1029. On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Soit $a > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-i\xi x}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$. *Ind.* On pourra dériver par rapport à ξ.

1030. PYTHON ***a)*** Pour $x \in\,]-1,1[$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta + x^2)\,d\theta$. Émettre une conjecture sur les valeurs de la fonction I.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in\,]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(\theta) = \dfrac{x^n\cos(n\theta)}{n}$.
  i) Montrer que la série de terme général $\theta \mapsto u_n(\theta)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
  ii) Montrer que la fonction $f_x : \theta \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n\cos(n\theta)}{n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  iii) En déduire que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,d\theta = -2\sum_{n\geqslant 1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^n\cos(n\theta)}{n}\,d\theta$ et justifier la conjecture de la question ***a)***.

1031. On note $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$.
a) Montrer que l'application $(u,v) \mapsto \displaystyle\int_a^b u(x)v(x)\,dx$ est un produit scalaire sur E.
b) Soit $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $f \in E$, on définit la fonction $g = T(f)$ par : $\forall x \in [a,b]$, $g(x) = \displaystyle\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy$. Montrer que T est un endomorphisme de E.

1032. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on note $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}\,dt$.
a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ existe.
b) Montrer que G existe et qu'elle est de classe C^1. Calculer $G(0)$.
c) Montrer que pour $x > 0$, $G'(x) = -2\,F(x)\,F'(x)$ et en déduire la valeur de I.

1033. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,e^{-xt}\,dt$.
a) Prouver la convergence de I.
b) Déterminer le domaine de définition de f.
c) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $]0,+\infty[$?
d) Déterminer l'expression de f sur $]0,+\infty[$.
e) Étudier la continuité de f en 0.
f) Montrer que $I = \pi/2$.

1034. On considère l'équation différentielle $(E) : (1+x^2)y'' + xy' - y = 0$.

a) Justifier qu'il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = 0$.
b) Déterminer les solutions de (E) développables en séries entières.
c) En posant $x = \mathrm{sh}(t)$, résoudre (E).

1035. PYTHON. On considère l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y'' + xy' - y/4 = 0$.
a) Existe-t-il une solution y de (E) sur $]-1,1[$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = \sqrt{2}$? Si oui, est-elle unique ?
b) Si une telle solution existe, la représenter graphiquement à l'aide de Python.
c) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
d) Soit $f_1 : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de (E) développable en série entière telle que $a_0 = 0$ et $a_1 = \sqrt{2}$. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

1036. PYTHON. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.
Soit $H : x \mapsto \sin(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt$.
On note enfin $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + y = f$.
a) Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe sur $[0,10]$.
b) Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution g_a de $(\mathcal{E})$ telle que $g_a(0) = a$ et $g_a'(0) = 0$. Tracer les graphes de g_a et $g_a - H$ sur $[0,10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
c) Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution h_a de $(\mathcal{E})$ telle que $h_a(0) = 0$ et $h_a'(0) = a$. Tracer les graphes de h_a et $h_a - H$ sur $[0,10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
d) Émettre une conjecture sur H et la prouver.
e) Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$. Montrer que F est solution de $(\mathcal{E})$.
f) Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
g) Que peut-on dire de $H - F$? Et de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$?

1037. PYTHON Soient $\alpha > 0$, $v \in \mathbb{R}$ et (S) le système différentiel $\begin{cases} x''(t) = -\alpha x'(t) \\ y''(t) = -\alpha y'(t) - 1. \end{cases}$
a) Tracer la solution de (S) telle que $x'(0) = y'(0) = v$ et $x(0) = y(0) = 0$, pour différentes valeurs de α et v. Interpréter qualitativement.
b) Résoudre le système. Montrer que la courbe solution a pour équation $y = f(x)$, où $f : x \mapsto x\left(1 + \dfrac{1}{\alpha v}\right) + \dfrac{1}{\alpha^2}\ln\left(1 - \dfrac{\alpha x}{v}\right)$.

1038. On note $\mathcal{S}_C$ l'ensemble des fonctions $f \in C^0([0,+\infty[\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et qui vérifient, pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, l'équation (C) :
$\partial_1 f(t,x) + f(t,x)\,\partial_2 f(t,x) = 0$.
Soit u une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 et croissante.
a) Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un unique réel $a(t,x)$ tel que $x = a(t,x) + tu(a(t,x))$.
On admet que la fonction $(t,x) \mapsto a(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et C^1 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

b) Soit $f : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto u(a(t,x))$.
i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0, x) = u(x)$.
ii) Montrer que $f \in \mathcal{S}_C$.

Probabilités

1039. PYTHON. On effectue des tirages dans une urne contenant initialement deux boules rouges et une boule noire. À chaque étape, on tire au hasard une boule dans l'urne puis on la replace dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur.
On note X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée au k-ième tirage est rouge et 0 sinon.
On note S_n le nombre de boules rouges tirées après n tirages. On convient de poser $S_0 = 0$.
a) Écrire une fonction simulant n tirages et renvoyant la liste $[S_0, \dots, S_n]$.
b) Écrire une fonction renvoyant $\mathbf{E}(S_n)$ pour n allant de 0 à 20. Tracer la ligne brisée représentant $\mathbf{E}(S_n)$ en fonction de n.
c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $S_n = k$.
d) Déterminer une relation entre $\mathbf{E}(S_{n+1})$ et $\mathbf{E}(S_n)$.
e) En déduire $\mathbf{E}(S_n)$ en fonction de n.
f) Déterminer la loi de X_k.

1040. *a)* Soient $B, C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls. Déterminer le rang de la matrice BC^T.
b) Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Montrer que l'ensemble E des colonnes $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que BC^T soit nulle ou non diagonalisable est un espace vectoriel. Préciser sa dimension.
c) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi donnée par $\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et X la colonne de coordonnées $X_1, \dots, X_n$.
Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne de coefficients tous égaux à 1. Déterminer la probabilité que la matrice BX^T soit nulle ou non diagonalisable.

1041. Un démarcheur dispose d'une liste de n correspondants qu'il appelle par vagues successives. Chaque appel est indépendant et identique. La probabilité d'obtenir un correspondant lors d'un appel est $p \in]0, 1[$.
Lors de la première vague, il appelle les n correspondants : soit X_1 le nombre de correspondants obtenus.
Lors de la deuxième vague, il appelle les $n - X_1$ correspondants absents lors de la première vague : soit X_2 le nombre de correspondants obtenus lors de cette vague d'appels. Et ainsi de suite.
a) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
b) Déterminer la loi de la variable Y_i qui indique le numéro de la vague à laquelle le correspondant numéro i répond, puis les lois des variables X_k.

1042. Soit (X_n) une suite de variable aléatoire mutuellement indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Soit $\epsilon > 0$. Déterminer la limite de $\left(\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{p}\right| \geqslant \epsilon\right)\right)_{n \geqslant 1}$.

b) Que vaut $\mathbf{P}(S_n = k)$ si $k < n$?
c) Montrer que : $\forall k \geqslant n$, $\mathbf{P}(S_n = k) = \dbinom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n$.

1043. PYTHON Soit $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $1/2$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 2^{Y_n}$ puis $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
a) Montrer que X_n n'est pas d'espérance finie.
b) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie une réalisation des n premiers termes de la suite $(\overline{X}_k)_k$.
c) Que peut-on conjecturer ? Le démontrer.
d) Calculer la loi de la variable $Z_n = \min(X_n, 2^n)$ puis préciser son espérance et sa variance.

1044. PYTHON Soient X et Y deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$, dont la loi jointe est donnée par : $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{ce^{-i}}{j^2 + 3j + 2}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$.
a) Déterminer la constante c.
b) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
c) Déterminer la loi de Y.
d) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
e) Soit $Z = 5X + 7Y$. Proposer une fonction en Python permettant de calculer $\mathbf{P}(Z = n)$ puis une fonction calculant la matrice colonne $(\mathbf{P}(Z = j))_{0 \leqslant j \leqslant n}$.
g) Montrez que pour $\mathbf{P}(Z = n) > 0$ pour tout $n > 23$.

1045. $^\diamond$ Une puce initialement placée à l'origine d'un plan (O, x, y) fait des sauts aléatoires d'une unité dans les quatre directions possibles. Soit (X_n, Y_n) ses coordonnées après n déplacements. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$. On pourra introduire $T_n = X_n - X_{n-1}$.

Centrale - PC

Algèbre

1046. $^\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme R_k tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait $R_k\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^k + \dfrac{1}{x^k}$. Donner une expression de R_k.

1047. $^\diamond$ On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $A_p = ((i+j-1)^p)_{1 \leqslant i,j \leqslant p+1}$ et $B_p = ((i+j-1)^p)_{1 \leqslant i,j \leqslant p+2}$.
a) Montrer que B_p n'est pas inversible. *Ind.* Utiliser le polynôme $P_i(X) = (X + i)^p$.
b) Calculer $\det(A_p)$.
Ind. Calculer BC avec $B = \left(\dbinom{p}{j-1} i^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p+1}$ et $C = \left((j-1)^{p+1-i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p+1}$.

1048. $^\diamond$ Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.
a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

b) Montrer que toute matrice de H est semblable à une matrice de diagonale nulle.
c) Montrer que toute matrice de H peut s'écrire $AB - BA$ avec A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1049. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1050. $^\diamond$ ***a)*** L'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-il un sous-espace vectoriel?
b) Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes.

1051. Soient $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ des réels, $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où, pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $m_{n,i} = a_i$, $m_{i,n} = b_i$, les autres coefficients étant nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

1052. PYTHON. Soit $A_n = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{1,j} = a_{n,j} = a_{j,1} = 1$, les autres coefficients étant nuls.
a) Donner le rang de A_n.
b) Calculer à l'aide de Python les valeurs propres de A_n lorsque $n \in \{2, \dots, 6\}$.
c) Calculer $\operatorname{tr}({A_n}^2)$.
d) En déduire les valeurs propres de A_n.

1053. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme diagonalisable de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'il admet un supplémentaire G, stable par f.

1054. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\psi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) L'endomorphisme ψ_A est-il injectif?
b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi_A(B) = B$. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $AB^k - B^kA = kB^k$. En déduire que B est nilpotente.
c) Soit $N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les autres coefficients étant nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que N soit valeur propre de ψ_A associée à la valeur propre 1.

1055. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Montrer que M est nilpotente si et seulement si $\operatorname{Sp}(M) = \{0\}$.
b) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $C = [A, B] = AB - BA$. On suppose que C commute avec A et B. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(C^k) = 0$. En déduire que C est nilpotente.

1056. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre si et seulement si les espaces propres de f sont de dimension 1.

1057. PYTHON. Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

a) Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer le polynôme caractéristique de A.
b) Soit $P(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \in E$.
On définit, pour $q \in \mathbb{N}^*$, $r_q(P) = (X - \lambda_1^q) \cdots (X - \lambda_n^q)$.
i) Écrire une fonction PYTHON `r(q,P)` qui renvoie $r_q(P)$.
ii) Tester cette fonction pour quelques valeurs de $q \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E$. Que peut-on conjecturer?
iii) Démontrer cette conjecture à l'aide de la première question.

1058. PYTHON. Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on définit la suite $(A_k)_{k\geqslant 1}$ par $A_1 = A$ et la relation de récurrence $A_{k+1} = A\left(A_k - \dfrac{\operatorname{tr} A_k}{k} I_p\right)$. On note aussi $X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k}X^k$ le polynôme caractéristique de A.
a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Écrire en Python une fonction renvoyant A_k et $\alpha_k = -\dfrac{\operatorname{tr} A_k}{k}$. Calculer χ_A sans Python et énoncer une conjecture.
b) Soit $P = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k}X^k = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ (les λ_i ne sont pas nécessairement distincts). Montrer que $\dfrac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{1}{X - \lambda_i}$. En déduire un développement en série entière autour de 0 de $x \mapsto \dfrac{P'(\frac{1}{x})}{P(\frac{1}{x})}$.
c) Avec les notations du ***b)***, donner une expression de S_n en fonction des S_k précédents et des a_k, lorsque $S_n = \operatorname{tr} A^n$.
d) Montrer la conjecture faite dans la question ***a)***.

1059. Si $T = X + \sum_{k=2}^{n} t_kX^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose $F_T = (P_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ où P_k est le reste de la division euclidienne de T^k par X^{n+1}.
a) On pose $T_1 = X + X^2$ et $T_2 = X + 2X^2 + X^3$. Déterminer F_{T_1} et F_{T_2}.
b) Soit $V_n = \{R \in \mathbb{C}_n[X],\ R(0) = 0\}$. Montrer que V_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$; préciser sa dimension.
c) Soit $T = X + \sum_{k=2}^{n} t_kX^k \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $F_T = (P_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de V_n.

1060. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les $a_{i,j}$ sont > 0 et que, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $a_{i,1}+\cdots+a_{i,n}=1$.
a) Montrer que 1 est valeur propre de A.
b) Montrer que toute valeur propre complexe de A a un module $\leqslant 1$.
c) Soit λ une valeur propre complexe de A de module 1. Montrer que $\lambda = 1$.

1061. PYTHON. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $\rho_i(A) = |a_{i,i}| - \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Une matrice est dite à diagonale dominante si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\rho_i(A) > 0$.
a) Montrer qu'une matrice à diagonale dominante est inversible.
b) Étudier la réciproque.
c) Programmer en Python une fonction d'argument une matrice A à diagonale dominante et renvoyant $\prod_{k=1}^{n} \rho_k(A)$.
d) Comparer sur des exemples $\prod_{k=1}^{n} \rho_k(A)$ et $|\det(A)|$. Conjecture ?
e) Prouver la conjecture.

1062. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On note $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ les valeurs propres distinctes de f.
a) Montrer que tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par f.
Soient F et G deux sous-espaces de E stables par f. On suppose que $F \oplus G = E$.
On pose, pour $k \in \{1,\ldots,p\}$, $F(\alpha_k) = F \cap E_{\alpha_k}(f)$ et $G(\alpha_k) = G \cap E_{\alpha_k}(f)$.
b) Montrer que $F = F(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus F(\alpha_p)$ et $G = G(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus G(\alpha_p)$.
c) En déduire que l'endomorphisme induit par f sur F (resp. G) est diagonalisable.

1063. PYTHON. Pour $P = \sum_k p_k X^k$ et $Q = \sum_k q_k X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_k p_k q_k$.
a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est l'unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ rendant la base canonique orthonormée.
b) On pose $F_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X]\ ;\ P(1) = 0\}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in F_n$ tel que $d(1, F_n) = \|1 - P_n\|$.
c) Écrire une fonction Python qui renvoie $\langle P, Q\rangle$.
d) On pose $\pi_n(X) = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left(nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)$. Afficher à l'aide de Python la matrice $(\langle \pi_i, \pi_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ pour différentes valeurs de n. Conjecture ?
e) Montrer la conjecture précédente.

1064. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $(x_1,\ldots,x_p)$ une famille de vecteurs de E. On pose $A = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\det(A) \geqslant 0$.

b) Montrer que $\det(A) > 0$ si et seulement si $(x_1,\ldots,x_p)$ est libre.

1065. PYTHON. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cos((2n+1)t)$. On munit $E = \mathcal{C}^0([0,\pi/2],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} fg$.
a) Montrer que la famille $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.
b) Soit $g \in E$. Donner une expression du projeté $P_n(g)$ de g sur $\mathrm{Vect}(\varphi_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.
c) On pose $f(x) = x^2\cos x$. Conjecturer avec Python le comportement de la suite $(P_n(f))$.
d) On pose, pour $f \in E$, $U(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\langle f, \varphi_n\rangle}{(2n+1)^2}\varphi_n$. Montrer que $U(f) \in E$ et que U est un endomorphisme symétrique de E.

1066. PYTHON. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soit K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $K_n(i,j) = 1$ si $|i-j| = 1$, $K_n(i,j) = 0$ sinon.
a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(U_1,\ldots,U_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et des réels λ_i tels que $K_n U_i = \lambda_i U_i$.
b) Écrire une fonction Python qui renvoie K_n.
c) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$. Montrer que, si $V_{i,j} = U_i\,{}^tU_j$, $(V_{i,j})$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
d) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $T(M) = K_n M + MK_n + M$. Montrer que T est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
e) Donner une fonction Python renvoyant $T(M)$.

1067. PYTHON. Soit $f : M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}$.
a) Montrer que f est une forme linéaire et déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$.
b) Écrire une fonction `f(M)` qui à une matrice symétrique M associe $f(M)$.
c) Écrire une fonction `sym(n)` renvoyant une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients aléatoires dans $\{-10,\ldots,10\}$.
d) Comparer sur des exemples $f(A^2)$ et $f(A)^2$. Conjecture ? Démontrer cette conjecture.

1068. PYTHON. *a)* Montrer qu'étant donnée une famille libre $(x_1,\ldots,x_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs (c'est-à-dire appartient à $T_n^+(\mathbb{R})$).
b) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.
c) Coder en Python le procédé de Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^n$. Vérifier le programme.
d) Coder en Python la décomposition QR définie en ***b)***.
e) Déterminer $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R})$. En déduire l'unicité de la décomposition QR.

1069. *a)* Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
Montrer $(*)$: $\forall P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(PA) \leqslant \mathrm{tr}(A)$.
Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$.
b) Montrer que pour $n = 2$ on a $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
c) Montrer que l'on a toujours $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et conclure.

Analyse

1070. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\|P\| = \sum_{k=1}^{n} |P(1/k)| + |P(0)|$ et $\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.
Trouver les constantes C_1 et C_2 optimales telles que
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], C_1\|P\|_\infty \leqslant \|P\| \leqslant C_2\|P\|_\infty$.

1071. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Montrer que A est limite d'une suite de matrices diagonalisables.
b) Montrer que $\chi_A(A) = 0$.

1072. PYTHON. Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(A) = \prod_{k=1}^{n} \left(I_r + \frac{k}{n^2}A\right)$.
a) Vérifier avec Python que, pour $r = 1$ et $a \in \mathbb{R}$, $f_n(a) \to e^{a/2}$ quand $n \to +\infty$.
b) Soit $g \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{C})$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{g'(0)}{2}$.
c) Pour $r = 1$ et $a \in \mathbb{R}$, montrer que $f_n(a) \to e^{a/2}$ quand $n \to +\infty$.
d) Toujours pour $r = 1$ mais maintenant avec $z \in \mathbb{C}$, montrer que $f_n(z) \to e^{z/2}$ après avoir illustré cela en Python.
e) Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 6 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$. Illustrer en Python la convergence de $(f_n(A))$ en dimension $r > 1$.
f) Toujours avec A donnée ci-dessus, démontrer la convergence de $(f_n(A))$.

1073. $\star$ $\diamond$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose : $e^{2i\pi P(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.

1074. $\diamond$ ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution dans l'intervalle $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$, que l'on note x_n.
b) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

1075. PYTHON. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par
$u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k^2$.
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}u_n^2 + \frac{n}{n+1}u_n$.
b) Écrire une fonction `u(n,x)` qui renvoie la valeur u_n pour la condition initiale $u_0 = x$.
c) On suppose que la suite (a_n) converge vers un réel ℓ.
Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ converge également vers ℓ.
d) ***i)*** Tester la limite de la suite (u_n) pour $x = 1$, $x = 3/2$, $x = 5/2$ avec le logiciel.
Conjecture sur cette limite quand $x \geqslant 1$? Prouver la conjecture.
ii) Tester la limite de la suite (u_n) pour $x \in]0,1[$.
Conjecture sur cette limite quand $x \in]0,1[$? Prouver la conjecture.
e) Montrer que, pour $x \in]0,1[$, la série $\sum u_n$ diverge.

1076. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \arctan u_n$.
a) Si $u_n \to 0$, donner la nature de $\sum u_n$.
b) Si $u_n \to +\infty$, donner la nature de $\sum \frac{1}{u_n}$.

1077. PYTHON. On pose $S_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k$, $T_k(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S_k(j)}$, $M_k = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{S_k(j)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Calculer $S_1(n)$. En déduire que M_1 est réel et donner sa valeur.
b) Montrer que, pour tout k, M_k est réel.
c) Donner une fonction Python qui renvoie la valeur de $T_k(n)$.
d) Afficher sur un même dessin les $T_k(n)$ pour $k \in \{1, \ldots, 10\}$ et $n \in \{1, \ldots, 50\}$. Émettre une conjecture sur $(M_k)_{k\geqslant 1}$.
e) Montrer cette conjecture.

1078. ***a)*** Nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(n\pi \frac{n!}{\sum_{k=1}^{n} k!}\right)$?
b) Nature de la série de terme général $v_n = \sin(\pi e n!)$?

1079. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$. On suppose que $\frac{f'}{f}$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$.
a) Montrer que la série $\sum f(n)$ converge.
b) Donner un équivalent du reste de cette série.

1080. Soit $f : t \mapsto t(1+t) + \int_0^t \sin\left(\frac{1}{u}\right) du$.
a) Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$.
b) Montrer que $f'([0,1])$ est un intervalle mais pas un segment.

1081. Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{C}^2} \int_{-1}^{1} |t^2 + at + b| \, dt$.

1082. Calculer $\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/t \rfloor}}{t} \, dt$.

1083. Soient $a > 0$, $\alpha > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ α-périodique.
On pose, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $I_\lambda = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} \, dt$ et $G_\lambda : x \mapsto \int_a^x (\lambda - f(t)) \, dt$.
a) Montrer que I_λ existe pour au plus une valeur de λ.

b) Montrer que si G_λ est bornée alors I_λ est convergente.
c) Montrer que I_λ converge pour une unique valeur que l'on précisera.
d) Donner un équivalent de $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,dt$ lorsque $t \to +\infty$.

1084. PYTHON. On pose $f_0 : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,
$f_{n+1} : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \ln\left(\dfrac{e^{f_n(x)} - 1}{f_n(x)}\right)$.
a) Montrer, pour $x > 0$, l'encadrement $x < e^x - 1 < xe^x$.
b) Montrer que la suite (f_n) est bien définie et qu'elle converge simplement vers la fonction nulle.
c) Écrire une fonction $f(n, x)$ renvoyant $f_n(x)$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} f_k$.
d) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
e) Tracer le graphe de $x \mapsto \ln\left(1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\right)$ sur $]0, 30]$.

1085. PYTHON. On pose $f(x,t) = \dfrac{1}{1+(x-t)^2}$, puis $g(x,t) = f(\{x\}, t) + f(-\{x\}, t)$, où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x.
On pose aussi $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(x,n)$ et $T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g(x,n)$.
a) Vérifier la bonne définition de S et T sur $\mathbb{R}$.
b) Tracer le graphe de T avec Python, en se limitant aux 1000 premiers termes, et faire une conjecture sur la continuité de T.
c) Démontrer cette conjecture.
d) Montrer que T est 1-périodique.
e) Tracer sur un même dessin les graphes de S et de T, et énoncer une conjecture relative à $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \sup_{x \geqslant a} |S(x) - T(x)|$.
f) Démontrer cette conjecture.

1086. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx)$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f est périodique.
c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$.
d) Tracer le graphe de f.

1087. Soit (a_n) une suite strictement décroissante de réels strictement positifs.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \in [0,1] \mapsto a_n x^n (1-x)$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite (a_n) pour que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
b) Même question pour une convergence normale.
c) Même question pour une convergence uniforme.

1088. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{(n+x)^2}$.
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$?

1089. PYTHON. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x\,e^x$.
a) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Donner son développement en série entière ainsi que son rayon de convergence.
b) Montrer que f induit une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle I à préciser. On note W la bijection réciproque.
c) Tracer le graphe de W.
d) Montrer que W est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle à préciser.
e) Montrer que W possède un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. Déterminer numériquement les premiers termes de ce développement limité.

1090. Soit $\lambda \in]-1, 1[$.
Trouver les solutions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$ qui sont développables en série entière autour de 0 su $\mathbb{R}$. Sont-ce les seules solutions ?

1091. On pose $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)\,dt$.
a) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
b) Calculer la somme de cette série entière.

1092. PYTHON. Pour $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, on note $a_{p,q}(n)$ le coefficient de X^n du polynôme $(X^2 + pX + q)^n$. On pose $f_{p,q}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,q}(n) x^n$.
a) Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$.
b) Écrire en Python une fonction renvoyant $a_{p,q}(n)$.
c) Écrire une fonction renvoyant $f_{2,1}(x)$; tracer le graphe de $x \mapsto f_{2,1}(x)\sqrt{1-4x}$. Conjecture ?
d) Démontrer la conjecture précédente.
e) Tracer le graphe de $x \mapsto f_{0,1}(x)\sqrt{1-x^2}$. Conjecture ?
f) Démontrer la conjecture précédente.

1093. Soient $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^N$, $g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence égal à 1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ avec $0 < |t_0| < 1$.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall r \in]0, 1-|t_0|[$, $\int_0^{2\pi} g(t_0 + r\,e^{i\theta})\,e^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\, r^k \frac{g^{(k)}(t_0)}{k!}$.

b) Montrer que la série entière $\sum \frac{g^{(k)}(t_0)}{k!} x^k$ a un rayon de convergence $\geqslant 1 - |t_0|$.

c) Montrer que g est développable en série entière au voisinage de t_0.

1094. PYTHON. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Montrer que la fonction f est strictement positive.

c) Représenter la courbe représentative de f à l'aide de PYTHON et faire une conjecture sur le comportement de f en -1.

d) i) Justifier l'existence de $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

ii) Montrer que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{G}{\sqrt{1-x}}$.

1095. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier la définition de u_n.

b) Donner un équivalent de u_n.

c) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

1096. PYTHON. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $I_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Soit $J = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln u}\,\mathrm{d}u$.

a) Justifier la définition de I_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et de J.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = S_n$.

c) Représenter $(S_n)_{1\leqslant n\leqslant 20}$. Conjecture ?

d) Montrer que (S_n) est monotone. Déterminer sa limite ℓ.

e) Représenter les points $(\ln(n), \ln|S_n - \ell|)_{1\leqslant n\leqslant 20}$. Conjecture ?

1097. Soit $n \geqslant 3$ et $f_n : x \mapsto x\exp(ix^n)$.

a) Prouver l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Déterminer un équivalent de I_n.

1098. PYTHON. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x)(1+\frac{1}{2}x)\ldots(1+\frac{1}{n}x)}$ et $I_n = \int_0^1 f_n$.

a) Représenter avec Python les premiers termes la suite de terme général $I_n \ln n$. Conjecture ?

b) On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Donner un équivalent simple de H_n.

c) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.

d) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

e) Prouver la conjecture.

1099. PYTHON. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + 2t + 3t^2 + \cdots + nt^{n-1}} \text{ et } a_n = \int_0^{+\infty} t^2(1+t)^n e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie. Calculer u_2 et u_3.

b) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et calculer sa limite.

c) i) Écrire une fonction `u(n)` qui renvoie le terme u_n.

ii) Afficher les valeurs de $3u_n$ pour quelques valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Conjecture ?

iii) Démontrer cette conjecture.

d) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1 - t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

e) Afficher quelques valeurs de $\frac{n^3(3u_n - 1)}{I}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Conjecture ?

1100. Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.

b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x^2) = 2\,f(x)$.

c) Exprimer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1101. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur D.

c) Expliciter f sans recours à l'intégrale.

1102. On pose $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$.

a) Montrer que $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Étudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

d) En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1103. PYTHON. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-tx^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Donner l'ensemble A des α pour lesquelles f_α est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Donner une fonction Python $f(\alpha, x)$. Tracer le graphe de f_α sur $[-10, 10]$ pour différentes valeurs de α.
c) Étudier la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de f_α.
d) Montrer que $f_\alpha(0) = f_{-\alpha}(0)$.
e) En étudiant $f_\alpha(0) + f_{-\alpha}(0)$, montrer que $f_\alpha(0) \geqslant \pi/2$.

1104. Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, e^{it}}{x^2 + t^2}\, \mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est bien définie et que $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{1 + u^2}\, du$.
b) Montrer que f est bornée et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
c) Montrer que $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{x}{x^2 + t^2}\right) = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x}{x^2 + t^2}\right)$.
En déduire $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f''(x) = f(x)$.
d) En déduire une expression simple de $f(x)$.

1105. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t^2} \mathrm{d}t$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.
b) Trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f.
c) Que vaut $f(0)$? *Ind.* Utiliser $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2} \mathrm{d}t$.

1106. Soit $\alpha > 1$.
a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$.
b) Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$. On admet que cette intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit $f : (t, x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{t(1 + t^2)}$. Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t, x)\, \mathrm{d}t$.
c) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$.
d) On admet que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)\, \mathrm{d}t$.
Donner une écriture simple de $\varphi''(x) - \varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
e) En déduire φ, φ' et φ''.

1107. ***a)*** Calculer, pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n (\ln x)^p\, \mathrm{d}x$.
b) Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_0^1 x^{-x}\, \mathrm{d}x$.
c) Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.
d) Montrer que $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{256}$ est une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

1108. PYTHON. Soient $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x}$ et $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xs}}{1 + e^{-s}}\, \mathrm{d}s$.
a) Déterminer le domaine de définition D de G. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur G.
b) Déterminer les variations de G, la limite de G en 0 et en $+\infty$.
c) Représenter le graphe de G.
e) Déterminer le domaine de définition de F. La série de fonctions converge-t-elle normalement/uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$?
f) On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $F_N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n + x}$. Représenter les graphes de $F_5, \dots, F_{10}$. Conjecture ?
g) Montrer qu'il existe au plus une fonction $H \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $H(x) + H(x + 1) = \dfrac{1}{x}$ et $H(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.
h) Conclure.

1109. PYTHON. ***a)*** Soient $p \in \mathbb{N}$, $A > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, A], \mathbb{R})$.
Montrer que, si $x \in [0, A]$, $S_p(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A f(t)\, e^{kp(x-t)}\, \mathrm{d}t$ est bien défini.
b) Montrer que, pour ces valeurs de x, $S_p(f)(x) = \displaystyle\int_0^A f(t) \left(1 - e^{-e^{p(x-t)}}\right) \mathrm{d}t$.
c) Donner avec Python une fonction qui renvoie $S_p(f)(x)$. On prend $p = 100$, $A = 3$, $f(t) = \dfrac{t^2}{2}$, puis $f(t) = \sin t$, puis $f(t) = e^t$. Tracer le graphe de $t \mapsto \displaystyle\int_0^x f$. Conjecturer sur ces exemples $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} S_p(f)(x)$.
d) Démontrer cette conjecture.

1110. ***a)*** Soit (a_n) une suite complexe telle que $\sum |a_n| < +\infty$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
b) Soit (a_n) une suite complexe telle que $\sum a_n$ converge. L'égalité précédente reste-t-elle vraie ?

1111. ***a)*** Donner le domaine de définition réel de $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$.
b) Donner la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $n^x \displaystyle\int_0^1 (1 - u)^n u^{x-1}\, \mathrm{d}x$.

1112. ***a)*** Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, avec $p \leqslant n$. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 x^n (\ln x)^p\, dx$ et calculer cette intégrale.
b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge et montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

1113. On considère l'équation différentielle (E) : $2xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$.
a) Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1, +\infty[$.
b) Montrer qu'il existe une unique solution sur $]-\infty, 1[$.
c) Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

1114. Soit a un réel. On considère l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0$, dont on recherche les solutions sur $]-1, 1[$.
a) Résoudre cette équation lorsque $a = 0$.
b) Dans le cas général, montrer que les solutions sont développables en série entière. Pour quelles valeurs de a existe-t-il des solutions polynomiales non nulles ?

1115. *a)* Déterminer le rayon de convergence de $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} t^{2n}$. Exprimer la somme à l'aide des fonctions usuelles.
b) Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de l'origine de l'équation différentielle $(1-t^2)\,y'' - 2t\,y' + 2\,y = 0$.

1116. Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$. Soient $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $V = {}^t(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Pour $u \in E$, on considère le système différentiel $(L_u) : X' = DX + u(t)\,V$.
On pose, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i : s \mapsto e^{\lambda_i(1-s)}$.
a) Résoudre (L_u).
Pour $u \in E$, soit Y_u la solution de (L_u) nulle en 0.
On note $Y_u(1) = {}^t(\varphi_1(u), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(u)) = \Phi(u)$.
b) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que φ_i est dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et que $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$.

1117. Soit $f : (x,y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) Simplifier l'expression de f.

Probabilités

1118. $^\diamond$ *a)* Donner la loi de la somme des faces de deux dés à six faces non pipés, jetés indépendamment.
b) Montrer que l'on ne peut piper deux dés à six faces, jetés indépendamment, de façon que la loi de la somme des faces soit la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.

1119. On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Après chaque lancer, on continue le jeu ou on s'arrête avec probabilité $1/2$. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués, X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de pile (resp. face).
a) Déterminer la loi de N ainsi que son espérance.
b) Montrer que X est d'espérance finie et calculer son espérance.

1120. Dans un jeu de pile ou face, on note $p \in]0,1[$ la probabilité de réaliser « face ». On note L_1 la longueur de la première liste constante. Par exemple, dans le tirage $PPFPPP\ldots$, $L_1 = 2$ tandis que dans le tirage $FPF\ldots$, $L_1 = 1$. On note L_2 la longueur de la deuxième liste constante ($L_2 = 1$ dans les deux cas précédents).
a) Donner la loi de L_1 et son espérance.
b) Donner la loi conjointe de L_1 et L_2.
c) Donner la loi de L_2. Calculer $\mathbf{E}(L_2)$
d) Les variables L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

1121. Python. On dispose de n boîtes $b_0, \ldots, b_{n-1}$ dans lesquelles on place n boules, la probabilité de placer une boule dans une boîte suivant la loi uniforme. On note N_i la variable qui représente le nombre de boules dans la boîte b_i.
a) Déterminer la loi de N_i. Les variables N_i sont-elles indépendantes ?
b) Calculer $\mathbf{E}(N_i)$, ainsi que $\mathbf{E}(N_i^2)$.
c) Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(t) = t \ln t$ pour $t > 0$. On pose $Y_i = f(N_i)$ et $H = \mathbf{E}(Y_0)$. Exprimer $\mathbf{E}(Y_i)$ sous forme d'une somme.
d) À l'aide de Python, calculer H_n pour $n \leqslant 100$.
e) Montrer que, pour $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{e}{(N+1)!}$.
f) Soit $S = e^{-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln k}{(k-1)!}$. Montrer que S est bien définie, écrire un programme renvoyant la somme partielle d'indice n de la série précédente, et calculer S à 10^{-6} près.

1122. Python. Soient $p \in]1/2, 1[$, $q = 1-p$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On pose $Y_n = 2X_n - n$ et $g_n : t \mapsto \mathbf{E}(e^{-tY_n})$. Soit $Z_n = \min\{Y_1, \ldots, Y_n\}$.
a) Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = \left(p\,e^{-t} + q\,e^t\right)^n$.
b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}(Y_n \leqslant 0) \leqslant g_n(t)$. En déduire qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ indépendant de n tel que $\mathbf{P}(Y_n \leqslant 0) \leqslant \alpha^n$.
c) Écrire une fonction `Z(n,p)` simulant la variable aléatoire Z_n lorsque l'on suppose de plus les X_n mutuellement indépendantes.
d) Écrire une fonction `E(n,p)` renvoyant la moyenne de `Z(n,p)` sur 300 expériences.
e) Représenter $(\texttt{E(5k,p)})_{1 \leqslant k \leqslant 100}$ pour $p = 0,75$, $p = 0,95$. Conjecture ?

1123. Python. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations ayant exactement k points fixes. On considère une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n, et X_n le nombre de ses points fixes. On pose $p_n = \mathbf{P}(X_n = 0)$.
a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
b) Exprimer $D_{n,k}$ en fonction de $D_{n-k,0}$.
c) Écrire un algorithme renvoyant le nombre de points fixes d'une permutation σ, puis un algorithme renvoyant p_n.

d) Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{p_n}{n!} z^n$ est supérieur ou égal à 1.
e) En déduire une expression de p_n sous forme d'une somme.

1124. PYTHON. On utilise *numpy, matplotlib.pyplot, random* provenant de la bibliothèque Python. Un mobile se déplace sur $\mathbb{Z}^2$. Les déplacements selon l'axe des x et l'axe des y sont indépendants et suivent la même loi : $\mathbf{P}(\delta_x = 1) = \mathbf{P}(\delta_x = -1) = \frac{1}{2}$. On note (x_n, y_n) la position du mobile à l'instant n, avec $(x_0, y_0) = (0,0)$. On note U_n le nombre de retours à l'origine entre l'instant 0 et l'instant $2n$.
a) Que dire de $\mathbf{P}(x_{2k+1} = 0)$ et de $\mathbf{P}(y_{2k+1} = 0)$?
b) Sachant que $\mathbf{P}(x_{2k} = 0) = \frac{a_k}{\sqrt{k}}$, donner $\mathbf{P}(y_{2k} = 0)$ et $\mathbf{E}(U_n)$.
c) Donner la loi de $\frac{\delta_x + 1}{2}$.
d) Donner une fonction $\mathtt{simu}(n)$ qui, prenant un entier n en argument, renvoie la valeur de (x, y) après n pas. Tracer une simulation du mouvement pour $n = 1000$.
e) Donner une fonction $\mathtt{retour}(n)$ qui renvoie un tableau donnant le nombre de retours à l'origine pour $k = 0, 2, \ldots, 2n$.
f) Donner un équivalent de a_n et de $\mathbf{E}(U_n)$. On utilisera le résultat suivant : si $v_n \sim w_n$, si $v_n \geqslant 0$ et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} v_k \sim \sum_{k=0}^{n} w_k$.

1125. PYTHON. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $P_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$ et $A_n = D(X_1, \ldots, X_n)$,

où $D(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 + x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + x_2 & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 + x_n \end{vmatrix}$.

a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n et de P_n.
b) Déterminer la loi de P_n. Les variables S_n et P_n sont-elles indépendantes ?
c) Coder une fonction qui étant donné un vecteur $[x_1, \ldots, x_n]$ renvoie la liste composée de $1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\prod_{i=1}^{n} x_i$ et $D(x_1, \ldots, x_n)$.
d) Effectuer plusieurs simulations avec $n = 10$. Conjecture ? La prouver.
e) Tracer pour dix simulations la suite $(A_n/n)_{1 \leqslant n \leqslant 200}$.
f) Déterminer l'espérance et la variance de A_n.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer $\lim_{n \to +\infty} P(|A_n| > \varepsilon n) = 0$.

1126. PYTHON. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour $\alpha > 0$, on pose $A_\alpha = \left\{ \omega \in \Omega, \ \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge} \right\}$.

a) Calculer $\mathbf{P}(A_\alpha)$.
b) Soit $s > 0$. Calculer $\mathbf{P}(X_1 > s)$.
c) Lancer 10 simulations PYTHON pour $(X_1, \ldots, X_{2000})$ et représenter les 10 sommes partielles $\sum_{k=1}^{2000} \frac{1}{k^\alpha x_k}$ où $(x_1, \ldots, x_{2000}) = (X_1(\omega), \ldots, X_{2000}(\omega))$ pour $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.
Établir une conjecture.
d) Dans la suite, on suppose que $\alpha \in]0, 1[$. On pose $\beta = 1 - \alpha$ et
$T_\beta = \{\omega \in \Omega, \ \{n \in \mathbb{N}^*, \ X_n(\omega) > n^\beta\} \text{ est fini}\}$. Comparer T_β et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geqslant n} (X_k \leqslant k^\beta)$.

Autres Écoles - MP

Algèbre

1127. *TPE.* Un nombre complexe α est dit algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers. Soit α un nombre algébrique.
a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$, unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$, tel que $\Pi(\alpha) = 0$. On note d le degré de Π.
b) On pose $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha] = \{P(\alpha) \ ; \ P \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]\}$ et $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha), P \in \mathbb{Q}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$.
c) Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$ est un corps.

1128. *IMT.* Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si m divise n, $X^m - 1$ divise $X^n - 1$. Étudier la réciproque.

1129. *IMT.* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
b) Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et P'.

1130. $^\diamond$ *TPE.* Montrer de deux manières différentes que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

1131. *IMT.* Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\begin{pmatrix} \cos \frac{a}{n} & \sin \frac{a}{n} \\ \sin \frac{a}{n} & \cos \frac{a}{n} \end{pmatrix}^n$.

1132. *CCINP.* Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$.
a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de rang r. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de $\mathrm{id}_E + \lambda p$.
b) Soient $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $B = {}^tAA$. Calculer le rang de B.
c) La matrice B est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et ses espaces propres.