d) Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{p_n}{n!} z^n$ est supérieur ou égal à 1.
e) En déduire une expression de p_n sous forme d'une somme.

1124. PYTHON. On utilise *numpy, matplotlib.pyplot, random* provenant de la bibliothèque Python. Un mobile se déplace sur $\mathbb{Z}^2$. Les déplacements selon l'axe des x et l'axe des y sont indépendants et suivent la même loi : $\mathbf{P}(\delta_x = 1) = \mathbf{P}(\delta_x = -1) = \frac{1}{2}$. On note (x_n, y_n) la position du mobile à l'instant n, avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$. On note U_n le nombre de retours à l'origine entre l'instant 0 et l'instant $2n$.
a) Que dire de $\mathbf{P}(x_{2k+1} = 0)$ et de $\mathbf{P}(y_{2k+1} = 0)$?
b) Sachant que $\mathbf{P}(x_{2k} = 0) = \frac{a_k}{\sqrt{k}}$, donner $\mathbf{P}(y_{2k} = 0)$ et $\mathbf{E}(U_n)$.
c) Donner la loi de $\frac{\delta_x + 1}{2}$.
d) Donner une fonction $\texttt{simu}(n)$ qui, prenant un entier n en argument, renvoie la valeur de (x, y) après n pas. Tracer une simulation du mouvement pour $n = 1000$.
e) Donner une fonction $\texttt{retour}(n)$ qui renvoie un tableau donnant le nombre de retours à l'origine pour $k = 0, 2, \dots, 2n$.
f) Donner un équivalent de a_n et de $\mathbf{E}(U_n)$. On utilisera le résultat suivant : si $v_n \sim w_n$, si $v_n \geqslant 0$ et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} v_k \sim \sum_{k=0}^{n} w_k$.

1125. PYTHON. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $P_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$ et $A_n = D(X_1, \dots, X_n)$,

où $D(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x_n \end{vmatrix}$.

a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n et de P_n.
b) Déterminer la loi de P_n. Les variables S_n et P_n sont-elles indépendantes ?
c) Coder une fonction qui étant donné un vecteur $[x_1, \dots, x_n]$ renvoie la liste composée de $1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\prod_{i=1}^{n} x_i$ et $D(x_1, \dots, x_n)$.
d) Effectuer plusieurs simulations avec $n = 10$. Conjecture ? La prouver.
e) Tracer pour dix simulations la suite $(A_n/n)_{1 \leqslant n \leqslant 200}$.
f) Déterminer l'espérance et la variance de A_n.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer $\lim_{n \to +\infty} P(|A_n| > \varepsilon n) = 0$.

1126. PYTHON. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour $\alpha > 0$, on pose $A_\alpha = \left\{ \omega \in \Omega,\ \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge} \right\}$.

a) Calculer $\mathbf{P}(A_\alpha)$.
b) Soit $s > 0$. Calculer $\mathbf{P}(X_1 > s)$.
c) Lancer 10 simulations PYTHON pour $(X_1, \dots, X_{2000})$ et représenter les 10 sommes partielles $\sum_{k=1}^{2000} \frac{1}{k^\alpha x_k}$ où $(x_1, \dots, x_{2000}) = (X_1(\omega), \dots, X_{2000}(\omega))$ pour $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.
Établir une conjecture.
d) Dans la suite, on suppose que $\alpha \in]0, 1[$. On pose $\beta = 1 - \alpha$ et
$T_\beta = \{\omega \in \Omega,\ \{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n(\omega) > n^\beta\} \text{ est fini}\}$. Comparer T_β et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geqslant n} (X_k \leqslant k^\beta)$.

Autres Écoles - MP

Algèbre

1127. *TPE.* Un nombre complexe α est dit algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers. Soit α un nombre algébrique.
a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$, unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$, tel que $\Pi(\alpha) = 0$. On note d le degré de Π.
b) On pose $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha] = \{P(\alpha)\ ;\ P \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]\}$ et $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha), P \in \mathbb{Q}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$.
c) Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$ est un corps.

1128. *IMT.* Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si m divise n, $X^m - 1$ divise $X^n - 1$. Étudier la réciproque.

1129. *IMT.* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
b) Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et P'.

1130. $^\diamond$ *TPE.* Montrer de deux manières différentes que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

1131. *IMT.* Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\begin{pmatrix} \cos\frac{a}{n} & \sin\frac{a}{n} \\ \sin\frac{a}{n} & \cos\frac{a}{n} \end{pmatrix}^n$.

1132. *CCINP.* Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$.
a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de rang r. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de $\mathrm{id}_E + \lambda p$.
b) Soient $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $B = {}^tAA$. Calculer le rang de B.
c) La matrice B est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et ses espaces propres.

1133. *CCINP.* Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ tel que $u^3 + u = 0$, A la matrice canonique de u.
a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
b) Déterminer le rang de u.
c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
d) En utilisant le lemme des noyaux, montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$.
e) Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$.
f) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1134. *IMT.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A$ soit diagonalisable et que 1 ne soit pas valeur propre de A. Montrer que A est diagonalisable.

1135. *CCINP.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b dans $\mathbb{C}$, M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les termes diagonaux (resp. non diagonaux) valent a (resp. b).
a) Calculer le polynôme caractéristique de M.
b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
c) Calculer le polynôme minimal de M.
d) Calculer le déterminant de $I_n + M$.

1136. *CCINP.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = M + 2\,{}^tM$.
a) Donner les valeurs et les espaces propres de f.
b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Calculer sa trace et son déterminant.

1137. *CCINP.* Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Trouver un polynôme annulateur P de A.
b) Si $k \in \mathbb{N}$, effectuer la division euclidienne de X^k par P. En déduire A^k.
c) On définit (X_n) par $X_0 = {}^t(1, 1, 1)$ et $\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = AX_k$. Calculer X_k pour $k \in \mathbb{N}$.

1138. *CCINP.* ***a)*** Localiser les racines de $P = X^3 - X - 1$.
b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $\chi_A(x)$ en $+\infty$. Que vaut $\chi_A(0)$?
c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

1139. *CCINP.* Soient $a \in \mathbb{R}$, b et c deux éléments de $\mathbb{R}^+$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.
a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) Si $c = 0$ et $b \neq 0$, calculer $\exp(A)$.
c) Si $bc \neq 0$, comment calculer $\exp(A)$?

1140. *TPE.* Soient n et q dans $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^q = I_n$. Montrer que l'espace propre de A associé à 1 a pour dimension $\dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \mathrm{tr}(A^k)$.

1141. *CCINP.* Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, D la droite engendrée par $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ke_k$.
a) Donner la matrice du projecteur orthogonal sur D dans la base e.
b) Donner le polynôme caractéristique et le spectre de p.
c) Calculer la distance de $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$ à D.

1142. *CCINP.* ***a)*** Soit E l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'en posant, pour $(f, g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$, on définit un produit scalaire sur E.
b) Déterminer $\inf \left\{ \displaystyle\int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2 \, dt \ ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1143. *TPE.* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, H un hyperplan de E, s la réflexion orthogonale d'hyperplan H, $f \in \mathcal{O}(E)$.
a) Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une symétrie orthogonale, en déterminer les espaces propres.
b) Déterminer les éléments de $\mathcal{O}(E)$ qui commutent à toutes les symétries orthogonales.

1144. *CCINP.* Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soient $a \in E$ un vecteur unitaire et $k \in \mathbb{R}$. On considère $f : x \mapsto x + k\langle x, a \rangle a$.
Montrer que f est symétrique. Pour quels k, f est-il inversible ? Trouver les valeurs propres de f et ses espaces propres.

1145. *IMT.* Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, f un endomorphisme symétrique de E à valeurs propres strictement positives.
a) Montrer que $(x, y) \in E^2 \mapsto \langle f(x), y \rangle$ est un produit scalaire sur E.
b) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g de E à valeurs propres dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $f = g^2$.

1146. *CCINP.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ de rang m.
a) Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, montrer que ${}^tXAX > 0$.
b) Montrer que $n \geqslant m$.
c) Montrer que $C = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Analyse

1147. *IMT.* Pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, soit $N(f) = \sup \left\{ \left| \displaystyle\int_0^1 f(t)t^n \, dt \right| \ ; \ n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1148. *IMT.* Soit, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, e_λ l'élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ défini par $\forall x \in \mathbb{R}, e_\lambda(x) = \exp(\lambda x)$. On note F le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ engendré par $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$. Montrer qu'en posant $\forall f \in F, N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}$, on définit une norme sur F.

1149. *CCINP.* La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

b) Énoncer et redémontrer le théorème de sommation des relations de comparaison pour les sommes partielles dans le cas divergent positif.

c) Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. En déduire un équivalent de u_n.

1150. *Saint-Cyr.* Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1151. *IMT.* Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} \ln^\alpha(k)$.

1152. *IMT.* Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, $n \geqslant 2$.

1153. *CCINP.* Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair, f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(t)| \leqslant |P(t)|$.

a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.

b) Montrer que f est la fonction nulle.

c) Le résultat subsiste-t-il si P est de degré pair ?

1154. *CCINP.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n(x) = \frac{1}{(n+x)^{\frac{3}{2}} + (n+x)^{\frac{1}{2}}}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

a) Montrer que f est bien définie sur $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que f est C^1 sur $]-1,+\infty[$.

c) Trouver un équivalent de f en -1 et montrer que f est intégrable sur $]-1,0]$.

d) Trouver la limite de f en $+\infty$.

e) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}$.

1155. *CCINP.* Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n}\,\mathrm{d}x$.

a) Trouver, si $n \in \mathbb{N}$, une relation entre u_n et u_{n+1}.

b) Si $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

c) Montrer que $\sum u_n$ diverge.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier la convergence de $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

e) Si $n \in \mathbb{N}$, lier v_n et u_n et exprimer v_n en fonction de n.

1156. *Saint-Cyr.* Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$, $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $I_n \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire un équivalent de W_{2n+1}, puis un équivalent de W_n.

1157. *IMT.* Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + e^{ax})\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

1158. *IMT.* Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes réels telle que $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f et $(P'_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

1159. *Saint-Cyr.* Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,\pi/2]$, soient $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$, $g_n(x) = n f_n(x)$.

a) Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Même question avec $(g_n)_{n\geqslant 0}$.

c) Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} g_n$. Quelle est la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$?

1160. *CCINP.* Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$.

a) Domaine de définition, monotonie et continuité de f ?

b) Montrer que f admet une limite en $+\infty$, la déterminer.

c) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

1161. *IMT.* Pour $x \in]-1,1[$, soit $f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$. Développer f en série entière. Exprimer f au moyen des fonctions usuelles.

1162. *IMT.* Soient a et b des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. Pour $t \in]0,1]$, soit $f(t) = \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$.

Montrer que $\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nb+a}$.

1163. *TPE.* ***a)*** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = (-1)^{n+1}\ln(x)x^{2n+2}$ si $x \in]0,1]$, $u_n(0) = 0$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\sum u_n$.

b) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

1164. *CCINP.* On note D le domaine de définition et S la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, où, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$.

a) Déterminer D.

b) Montrer que S est continue sur D.

c) La série $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur D ?

1165. *CCINP.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{2x}{n^2+x^2}$.
a) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.
b) Montrer que f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi$. *Ind.* On pourra considérer $t \mapsto \dfrac{2x}{t^2+x^2}$.

1166. *CCINP.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.
a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
c) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
d) Donner un équivalent de f en 0.

1167. *IMT.* Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.
a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Déterminer la limite de S en $+\infty$.
c) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1168. *IMT. a)* Développer $(1-x)^{-1/2}$ en série entière sur $]-1,1[$. On écrit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ce développement.
b) Donner un équivalent de a_n.
c) Trouver un équivalent en 1^- de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1169. *CCINP. a)* Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \ln(n)x^n$, dont on note $g(x)$ la somme.
b) Montrer que $\forall x \in]-R,R[, (x-1)g(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$.
c) En remarquant que, pour $n \geqslant 2$, $\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right) = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, encadrer $(x-1)g(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
d) Déterminer un équivalent de $g(x)$ en R^-.

1170. *Navale.* Soient, si $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $G(x) = \displaystyle\int \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Exprimer G en fonction de F.
b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1171. *CCINP.* Résoudre le système différentiel $x' = x+2y-z, y' = 2x+4y-2z, z' = -x-2y+z$.

1172. *CCINP.* Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, u une application de classe C^k de I dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C^k(I,\mathbb{R})$, soit $L_u(f) = f' + uf$.
a) Montrer que L_u est linéaire. Calculer $L_u \circ L_u$.

b) Résoudre $y'' + 2xy' + y = 0$.

1173. *CCINP.* Soit q une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, y une fonction non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$ telle que $y'' + qy = 0$. Montrer que les zéros de y sont isolés. En déduire que, si S est un segment de $\mathbb{R}$, y n'a qu'un nombre fini de zéros sur S.

1174. *TPE.* Trouver les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$.

1175. *IMT. a)* Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$ sont les $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
b) Montrer qu'une seule des solutions admet une limite finie en $+\infty$.

1176. *TPE.* La fonction f est définie sur $[0,1]^2$ par $f(1,1) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ pour $(x,y) \neq (1,1)$, .
a) Montrer que f est continue.
b) Déterminer le maximum de f.

1177. *CCINP.* Intégrer l'équation aux dérivées partielles $z\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = -x^2 - y^2$ où $z = z(x,y)$. On utilisera les coordonnées polaires.

Probabilités

1178. *TPE.* ◦ Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.
a) Trouver $m \in \mathbb{R}$ minimisant $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{E}((X-x)^2)$.
b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On suppose que $\mathbf{P}(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $\mathbf{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

1179. *TPE.* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $Z = X/Y$.

1180. *IMT.* Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.
Montrer qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z définies sur un même espace probabilisé telles que $X \sim Y + Z$.

1181. *IMT.* Dans un jardin de $n \geqslant 1$ tulipes (numérotées), chaque tulipe a une probabilité $p \in]0,1[$ de fleurir à l'année k. Si une tulipe fleurit à l'année k, elle fleurira aussi les années suivantes. Soit X_i la variable qui compte le nombre d'années au bout desquelles la tulipe i est fleurie. On suppose l'indépendance des X_i. Soit enfin X la variable qui compte le nombre d'années au bout duquel tout le jardin est fleuri.
a) Déterminer la loi de chaque X_i. Exprimer X en fonction des X_i.
b) Pour tout k, calculer $\mathbf{P}(X > k)$ et en déduire la loi de X.
c) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

1182. *IMT.* Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
a) Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.
b) Quelle est la probabilité que X soit paire ?

1183. *CCINP.* Soient λ et μ dans $\mathbb{R}^{+*}$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer, si $n \in \mathbb{N}$, la loi de X conditionnellement à l'événement $(X+Y=n)$.

1184. *CCINP.*° Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
a) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\mathbf{P}(X+Y=k)$.
b) Même question pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.
c) En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer $\mathbf{P}(X+Y=Z)$.
d) Déterminer $\mathbf{P}(X+Y+Z=n)$.

Autres Écoles - PSI

Algèbre

1185. *IMT.*° Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
a) Donner le module et un argument de $z^k - 1$.
b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} |z^k - 1| = 2 \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

1186. *TPE.*° On se donne trois réels distincts a_1, a_2, a_3. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$.
a) Montrer que φ est un isomorphisme.
b) On note $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant 3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$. Montrer que $(L_k)_{1\leqslant k\leqslant 3}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Expliciter les L_k.

1187. *CCINP.* *a)* Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que la famille $((X+k)^n)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.
Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X+k)^n = 0$.
b) Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X+k)^p = 0$.
c) Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k k^p = 0$. Conclure.

1188. *CCINP.*° Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E. On suppose que $p + q = \mathrm{id}$ et $\mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q) \leqslant \dim E$. Montrer que p et q sont des projecteurs.

1189. *IMT.*° Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$.
a) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.
b) Que peut-on dire des rangs de f, $f \circ g$ et $g \circ f$?
c) Montrer que $f \circ g$ est un projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à un sous-espace contenant $\mathrm{Ker}(g)$.
d) On suppose désormais que l'on a en outre $g \circ f \circ g = g$. Que peut-on dire des rangs de f et g ?
e) Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

1190. *ENSEA.*° Soient E un espace vectoriel et $(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathcal{L}(E)^n$.
On suppose que $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \mathrm{id}$ et que $f_i \circ f_j = 0$ pour tous i et j distincts.
a) Montrer que les f_i sont des projecteurs.
b) Montrer que $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{Im}\, f_i$.

1191. *ENSEA.*° Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à M.
b) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $M = AB$.
c) Montrer que $BA = I_2$.

1192. *Navale.*° Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice.

1193. *CCINP.*° Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.
a) Si $1 \leqslant i, j, k, \ell \leqslant n$, calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$.
b) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on ait $f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est colinéaire à la trace.
c) Soit g un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $g(I_n) = I_n$ et, pour tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $g(AB) = g(BA)$. Montrer que g conserve la trace.

1194. *TPE.*° Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
a) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.
b) Montrer que s'il existe un entier p tel que $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+1})$, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+k})$.
c) En déduire que $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^{n+1})$.

1195. *IMT.* Soient u, v, w trois suites vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n$, $v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n$, $w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n$. Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n, u_0, v_0, w_0.

1196. *IMT.* Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1197. *St Cyr.* Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable et trouver ses éléments propres.

1198. *IMT.* On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ dont les colonnes sont notées $C_1, \ldots, C_n$, alors pour tout $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $AX = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j$.
a) Déterminer le rang de la matrice $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Calculer $C_1 + C_5$. En déduire un élément propre de Z.
c) Calculer $C_1 + C_5 - C_3$. En déduire un élément propre de Z.
d) Achever la réduction de Z.

1199. *CCINP.* Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g = f$.
a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
b) On note e_1 et e_3 des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 1 et 3. Montrer que $g(e_1)$ et $g(e_3)$ sont aussi des vecteurs propres de f associés à 1 et 3 respectivement.
c) En déduire que e_1 et e_3 sont des vecteurs propres de g.
d) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?
e) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour le spectre de g.

1200. *TPE.* Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 3 de M.
b) La matrice M est-elle inversible ?
c) Est-elle diagonalisable ?
d) Montrer que les valeurs propres de M^2 sont négatives ou nulles.

1201. *CCINP.* Soient E un espace vectoriel de dimension n, ℓ une forme linéaire non nulle sur E et a un vecteur de E non nul. On pose $f : x \in E \mapsto \ell(a)x - \ell(x)a$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
b) Calculer $f(a)$.
c) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
d) Calculer $f(\mathrm{Ker}(\ell))$.
e) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
f) On suppose $\ell(a) = 0$. Calculer f^2 ; en déduire un polynôme annulateur de f. Retrouver le résultat de la question *e)*.

1202. *CCINP.* Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = \mathrm{id}$ et $u \neq \mathrm{id}$.
a) Montrer que 1 est valeur propre de u.
b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}) = \mathbb{R}^3$.
c) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1203. *IMT.* Soient $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $e_1 = \cos$, $e_2 = \sin$, $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Pour tout $f \in E$, on pose $T_f : t \mapsto (10f(0) - 6f'(0))\cos(t) + (12f(0) - 7f'(0))\sin(t)$. On pose enfin $u : f \mapsto T_f$.
a) Montrer que e_1 et e_2 sont linéairement indépendants.
b) Montrer que u est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
c) Montrer que $v = u|_F$ est un endomorphisme de F.
d) Donner les valeurs propres de v.

1204. *Navale.* Soient $\mathbb{K}$ un corps, f un endomorphisme de rang r d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Montrer que le polynôme minimal de f est de degré majoré par $r + 1$.

1205. *Navale.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(M^k) = n$.

1206. *CCINP.* Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et $A = XX^T$.
a) Déterminer le rang et le spectre de A.
b) Calculer le polynôme caractéristique de A.
c) Montrer l'égalité $\det(I_n + A) = 1 + X^T X$.

1207. *CCINP.* Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = (\alpha^{i+j-2})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.
b) Calculer le rang de A. En déduire ses valeurs propres.
c) À quelle condition sur α la matrice A est-elle diagonalisable ?

1208. *CCINP. a)* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que $\mathrm{tr}(M^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.
b) Pour $n \geqslant 3$, on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sur les quatre bords, égaux à 1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.

1209. *CCINP.* Soit $E = C^0([0,1])$. Pour $f \in E$, on définit $\varphi(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ par : $\varphi(f)(0) = f(0)$ et $\varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ si $x \neq 0$.
a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
b) Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de φ.
c) Montrer que 1 est une valeur propre de φ et trouver l'espace propre associé.
d) Trouver les autres valeurs propres.

1210. *CCINP.* Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $3u^3 = u^2 + u + \mathrm{id}$.
a) Montrer que u est bijectif.
b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est combinaison linéaire de u^2, u et id.
c) Est-il possible que u soit diagonalisable ? non diagonalisable ?
d) Qu'en est-il sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

1211. *CCINP.* Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $u^3 + u^2 + u = 0$.
a) Déterminer $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.
b) Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ puis montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
c) Soit v l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ induit par u. Que représente le degré du polynôme caractéristique de v par rapport à u ?
d) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de v, puis en déduire que le rang de u est pair.

1212. *CCINP.* Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$.
a) Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est un projecteur.
c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.
d) Construire une matrice propre de f_A à l'aide d'un vecteur propre de A.
e) Construire un vecteur propre de A à l'aide d'une matrice propre de f_A.

f) En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$.

1213. *Navale.* ***a)*** Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B et C sont semblables.

1214. *CCINP.* Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

a) Exprimer le rang de B en fonction du rang de A.

b) Trouver une relation entre χ_B et χ_A. En déduire le spectre de B en fonction du spectre de A.

c) Déterminer les dimensions des espaces propres de B en fonction de celles des espaces propres de A.

d) Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

1215. *TPE.* On note $E = \mathbb{C}_n[X]$. Soient F et G deux polynômes n'ayant pas de racine commune. On suppose que G est de degré $n+1$ et scindé à racines simples ; on note $a_0, \ldots, a_n$ ses racines. On note φ l'application qui à $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de FP par G.

a) Montrer que φ est un automorphisme de E.

b) Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de E.

c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

1216. *IMT.* Soient E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ et v un vecteur de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = v$.

a) Quel est le rang de f ?

b) Discuter de la diagonalisabilité de f en fonction du vecteur v.

1217. *CCINP.* Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que 0 est racine simple d'un polynôme annulateur de u.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

b) Montrer que si u est nilpotent alors u est nul.

1218. *CCP.* Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

a) Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 aussi.

b) Montrer que la réciproque est fausse.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \,\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \lambda \,\mathrm{id})$.

d) Montrer que si u est bijectif alors la réciproque du résultat de la question ***a)*** est vraie.

1219. *CCINP.* ***a)*** Montrer que si deux matrices U et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables alors pour tout polynôme R, $R(U)$ est semblable à $R(V)$.

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

b) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

c) Montrer que si A est diagonalisable et B est nulle alors M est diagonalisable.

d) Démontrer la réciproque.

1220. *IMT.* On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au plan P défini par les équations $\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$

1221. *CCINP.* ***a)*** Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^n \, dt$ (distinguer les cas n pair et n impair ; on donne $I_0 = 1$).

b) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t)Q(t) \, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c) Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

1222. *CCINP.* Soit $E = C^0([0,1])$. On pose, pour $f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)t^2 \, dt$.

a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $F = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $u \in E$ telle que $u(x) = x \ln x$ pour tout $x \in \,]0, 1]$. Déterminer le projeté orthogonal de u sur F.

d) Déterminer $\displaystyle\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (at + b - t \ln t)^2 t^2 \, dt$.

1223. *CCINP.* Soit $E = C^2([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$.

On considère les sous-ensembles $V = \{f \in E,\ f'' = f\}$, $G = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $H = \{f \in E,\ f(0) = \mathrm{ch}(1),\ f(1) = 1\}$.

a) Montrer que la famille $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est une base de V.

b) Soient $f \in V$ et $g \in E$. Montrer que $\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$. Calculer $\langle \mathrm{ch}, \mathrm{sh} \rangle$, $\|\mathrm{ch}\|^2$ et $\|\mathrm{sh}\|^2$.

c) Soient $f \in V$ et $g \in G$. Montrer que $\langle f, g \rangle = 0$.

d) Soit $f \in H$. Calculer $\langle f, \mathrm{ch} \rangle$ et $\langle f, \mathrm{sh} \rangle$. En déduire le projeté orthogonal de f sur V.

e) Calculer $\displaystyle\inf_{f \in H} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) \, dt$.

1224. *CCINP.* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

a) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels. Montrer que $\left\| \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.

b) En déduire que si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1$ alors la famille $(e_i + u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E.

1225. *TPE.* À quelle condition sur les réels p et q la matrice $A = \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ q & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ?

Déterminer les éléments propres de A.

1226. *CCINP.* Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $(I_n + 2M)/3 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle Mx, x \rangle = \|x\|^2$.

b) Que peut-on en déduire sur M ?

1227. *CCINP.* On dit qu'une matrice carrée réelle est à diagonale propre si ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres répétées avec leur multiplicité.

a) Donner des exemples de telles matrices.

b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?

c) Soit A une matrice antisymétrique à diagonale propre.

i) Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

ii) Montrer qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0$.

iii) Calculer $\left(A^T A\right)^p$.

iv) En remarquant que $A^T A$ est symétrique, montrer que $A = 0$.

d) Donner la dimension de l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrice antisymétriques.

e) On note E_n l'ensemble des matrices à diagonale propre. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel inclus dans E_n alors $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

f) Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace inclus dans E_n ?

Analyse

1228. *Navale.*° Soit (u_n) une suite complexe telle que $u_{n+1} = (u_n + |u_n|)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite en fonction de u_0.

1229. *TPE.*° Pour $n \geqslant 2$, on note $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2 x - 2$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) décroît et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

c) Déterminer un équivalent de u_n.

1230. *IMT.* On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$.

a) Déterminer une relation entre d_{n+1} et d_n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n \leqslant 2$.

c) Montrer que (d_n) est convergente. Déterminer sa limite.

1231. *ENSEA.* Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

1232. *IMT.* Nature de la série $\sum (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$?

1233. *TPE.* *a)* Pour $n \geqslant 1$, montrer que l'équation $x^n + nx = 1$ possède une unique solution positive, que l'on note u_n.

b) La suite (u_n) converge-t-elle ?

c) Déterminer un équivalent simple de u_n.

d) Déterminer la nature de la série $\sum n!\left(\dfrac{1}{n} - u_n\right)$.

1234. *IMT.* *a)* Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $g_n : t \mapsto \ln(t) - \arctan(t) - n\pi$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $g_n(x_n) = 0$.

b) Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{x_n}$ converge.

1235. *IMT.* Soit (a_n) une suite de réels vérifiant $a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

a) Étudier la convergence de la suite (a_n).

b) Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n a_n$.

c) Déterminer la nature de la série $\sum a_n^2$.

1236. *CCINP.* Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels positifs. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant a_n/2$.

b) Montrer que si $\sum a_n$ converge alors (u_n) converge.

c) Montrer que la réciproque est fausse. *Ind.* Considérer $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

1237. *CCINP.* Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{a_n}{(1 + a_1) \dots (1 + a_n)}$.

a) Calculer $u_1 + u_2$. Généraliser.

b) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ pour $a_n = 1/\sqrt{n}$.

1238. *CCINP.* *a)* Pour $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $S_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$.

b) Développer $(n+1)^p$ et en déduire S_p en fonction de $S_0, \dots, S_{p-1}$.

c) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p \in \mathbb{N}$.

1239. *TPE.* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On définit $K = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = \cos x\}$.

a) Montrer que si $\deg(P) \geqslant 1$, alors K est borné.

b) Montrer que si une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I s'annule un nombre infini de fois, alors sa dérivée aussi.

c) Montrer que si K est infini, alors P est constant.

1240. *IMT.* Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) dt$ et la calculer.

1241. *ENSEA.* On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt$.

a) Donner le domaine de définition de F et calculer sa dérivée.

b) Montrer que l'on a, au voisinage de $+\infty$, $F(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

c) Montrer que $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.

d) Déterminer un équivalent simple de F en 0.

e) Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F$.

1242. *CCINP.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in [-1, 1] \mapsto \sin(nxe^{-nx^2})$.

a) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction f.

b) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, 1]$ si $a > 0$.

c) Y a-t-il convergence uniforme sur $[-1, 1]$?

1243. *CCINP.* ***a)*** Montrer que pour tout $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a $|\ln(1+t) - t| \leqslant 2t^2$.
b) Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions
$\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)$.

1244. *IMT.* Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, soit $f_n(x) = a_n x^n (1-x)$.
a) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
b) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
c) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

1245. *TPE.* Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)}$.
a) Étudier la convergence de la série sur $]0, +\infty[$.
b) Calculer $f(1)$.
c) La fonction f est-elle de classe C^1 ?
d) Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

1246. *IMT.* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$.
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Étudier la continuité de f.
c) Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
d) Déterminer la limite ℓ de f en $+\infty$ puis un équivalent de $f(x) - \ell$.
e) Étudier les variations de f.

1247. *CCINP.* Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$.
a) Étudier la convergence de $\sum u_n$. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.
c) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$.
d) Calculer S.

1248. *CCINP.* Pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$ on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.
a) Déterminer le domaine D de convergence de $\sum u_n$.
b) Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.
c) Montrer que, pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$, le reste d'ordre n de la série vérifie $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.
d) Étudier la continuité de $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ sur D.
e) Montrer que S est intégrable sur D.

1249. *IMT.* ***a)*** Donner un équivalent simple de $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

b) Donner le rayon de convergence de $\sum H_n x^n$ puis calculer la somme de cette série entière.

1250. *CCINP.* ***a)*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto (\operatorname{ch} x)^{-n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
b) Limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$ quand $n \to +\infty$.
c) Nature des séries $\sum (-1)^n I_n$ et $\sum I_n$. *Ind.* Montrer que $\operatorname{ch} x \geqslant \operatorname{sh} x$ sur $\mathbb{R}^+$.
d) Rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$.

1251. *IMT.* ***a)*** Donner les développements en série entière en 0 des fonctions cos et sh.
b) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
c) Expliciter la somme $S(x)$ de la série précédente selon le signe de x.

1252. *CCINP.* Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et, pour $n \geqslant 2$, $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-1}$.
a) Exprimer a_n en fonction de n.
b) On propose maintenant une autre méthode.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 4^n$. En déduire une inégalité sur le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1+5x}{1+2x-3x^2}$. Calculer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
d) En déduire a_n.

1253. *CCINP.* On considère la série entière $\sum \dfrac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.
a) Déterminer son rayon de convergence R.
b) Pour $x \in]-R, R[$, on note $f(x)$ la somme de cette série entière. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients variables vérifiée par f. En déduire f.

1254. *IMT.* Soit u une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.
a) La suite u est-elle bien définie ? unique ?
b) On suppose que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de rayon strictement positif. Trouver une relation entre f^2 et f et en déduire f à l'aide de fonctions usuelles.
c) Développer f en série entière et conclure.

1255. *IMT.* Soit $f_n : x \mapsto (x^2+1)\dfrac{n\exp(x) + x\exp(-x)}{n+x}$.
a) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.
b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$.

1256. *Navale.* On pose, pour $n \geqslant 2$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,dt$. Montrer que la suite (I_n) est bien définie et calculer sa limite.

1257. *CCINP.* On pose, pour tout $\in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$.

a) Donner une relation entre I_n et J_n (on pourra calculer $n(1-I_n)$).
b) En déduire un développement asymptotique de I_n avec une précision de $\frac{1}{n}$.
c) Montrer que l'application $F : u \in [0,1] \mapsto \int_0^u \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$ est bien définie, puis montrer que $\int_0^1 F(t^n)\,dt \to 0$ quand $n \to +\infty$.
d) En déduire un développement asymptotique de J_n avec une précision de $\frac{1}{n}$, puis un développement de I_n en $\frac{1}{n^2}$.

1258. *ENSEA.* Soit $\Phi : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,dt$. Montrer que Φ admet un unique zéro z dans $[0,\pi]$ et que $z > \pi/2$.

1259. *IMT.* Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}\,dt$.
a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $F(x)$ est convergente.
b) Étudier les variations de la fonction F.
c) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
d) Montrer que, pour tout $x > 0$, $F(x) \geqslant \frac{1}{e}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dt}{1+t}$. En déduire la limite de F en 0.

1260. *ENSEA.* *a)* Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\operatorname{sh}(t)}{t}\,dt$.
b) Calculer f'.
c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire f.

1261. *CCINP.* Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-tx}}{e^t-1}\,dt$.
a) Donner le domaine de définition de f.
b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
c) On suppose $x > 0$. Calculer $f(x-1) - f(x)$.
d) Déterminer une expression de $f(x)$ sous la forme d'une somme de série.
e) Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser pour trouver cette expression de $f(x)$?

1262. *CCINP.* Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}\,dt$.
a) Montrer que $f(x)$ existe pour $x \geqslant 0$.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
c) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.
d) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.
e) Calculer $f'(x)$ et $f(x)$.
f) Justifier l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

1263. *CCINP.* On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$.
a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_{n-1}^{n} \ln f(t)\,dt$. Déterminer la nature de $\sum (-1)^n/u_n$.

1264. *CCINP.* *a)* Existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dx$.
b) Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

1265. *IMT.* *a)* Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,dx$.
b) Pour $x \in]0,1[$, écrire $\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$ sous forme d'une somme $\sum u_n(x)$.
c) Calculer I.

1266. *CCINP.* On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n\,dt$.
a) Calculer $\lim I_n$.
b) Calculer $I_n + I_{n+2}$ (on fera le changement de variable $u = \tan t$).
c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
d) Montrer que la série de terme général $(-1)^n I_n$ converge et calculer sa somme.

1267. *TPE.* Soit (1) l'équation différentielle $xy' - 2|y| = x$. On suppose qu'il existe une solution f de (1) définie sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $f(0) = 0$.
b) Montrer que f est strictement positive sur $]0,+\infty[$.
c) En déduire la forme générale de f.
d) Conclure qu'il n'existe aucune solution de (1) sur $\mathbb{R}$.

1268. *CCINP.* *a)* Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
b) Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

1269. *IMT.* Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -2x - y - z. \end{cases}$

1270. *TPE.* Extrema de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$?

Probabilités

1271. *TPE.* ◊ Une information booléenne est transmise grâce à n relais notés $R_1, \ldots, R_n$. La probabilité qu'un relai transmette correctement l'information est p. Les relais sont indépendants.
Calculer la probabilité que l'information transmise par R_n soit la même que celle reçue par R_1. Application numérique : $n = 100$ et $p = 0,999$.

1272. *CCP.* ° On considère $2n$ lapins sélectionnés aléatoirement dans un enclos à lapins. La probabilité qu'un lapin soit mâle est $1/2$. On note M la variable aléatoire égale au nombre de lapins mâles obtenus et C la variable aléatoire égale au le nombre de couples possibles (un lapin mâle + un lapin femelle).
a) Donner la loi de M.
b) Donner une relation entre C et M.
c) Donner la loi de C.
d) Calculer l'espérance de C.

1273. *St Cyr.* PYTHON. On jette un dé jusqu'à obtenir 5, on note T la variable aléatoire égale au nombre de lancers.
a) Donner la loi de T, son espérance et sa variance.
b) Écrire une fonction Python qui simule l'expérience et renvoie T.
c) On jette 4 dés et on retire à chaque fois ceux qui sont tombés sur 5, jusqu'à ne plus avoir de dé. On note N la variable aléatoire associée à ce nombre de lancers. Écrire une fonction Python qui simule cette expérience, et une autre qui donne une approximation de l'espérance de N.
d) Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(N \leqslant k)$. En déduire l'espérance de N.

1274. *CCINP.* On considère deux variables de Poisson indépendantes X et Y, de paramètres λ et μ.
a) On pose $Z = X + Y$. Question de cours : montrer que $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer et reconnaître la loi conditionnelle de X sachant que $Z = n$.

1275. *IMT.* On considère une pièce équilibrée et on réalise une série de lancers indépendants. On s'intéresse à l'apparition du deuxième pile. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de faces avant l'apparition du deuxième pile. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

1276. *CCINP.* Trois individus A_1, A_2 et A_3 se présentent dans un bureau de poste comportant deux guichets. Les individus A_1 et A_2 sont pris en charge dès leur arrivée, A_3 doit attendre que A_1 ou A_2 ait fini pour passer à son tour au guichet.
Le temps passé au guichet par A_i est noté X_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$); on suppose que chaque X_i suit une loi géométrique de paramètre p.
a) On note Y le temps d'attente de A_3 avant son passage au guichet.
Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbf{P}(Y > k)$. Donner la fonction de répartition de Y.
b) Soit Z le temps total passé par A_3 à la poste. Donner la loi de Z.
c) Déterminer le temps moyen passé par A_3 à la poste.

1277. *IMT.* Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = n) = \dfrac{a}{n(n+1)}$.
a) Trouver la valeur de a.
b) La variable X admet-elle une espérance ? une variance ?
c) Déterminer la fonction génératrice de X.

1278. *CCP.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive la loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = \sum_{n=1}^{N} X_n$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
b) Soit $x \in \,]-1, 1[$. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.
c) Calculer $\mathbf{P}(Y = k)$ et donner la loi de $Y + 1$.

1279. *CCINP.* On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On dispose d'un jeton mobile sur un axe gradué de 0 à n ; la position initiale du jeton est 0. On effectue des tirages avec remise dans l'urne et à chaque tirage, si le numéro de la boule est inférieur ou égal à la position du jeton, on déplace le jeton d'une graduation vers la gauche, et si le numéro de la boule est strictement supérieur à la position du jeton, on le déplace d'une graduation vers la droite.
a) Donner les positions possibles du jeton après p lancers.
b) On note X_p la position du jeton après p lancers. Exprimer $\mathbf{P}(X_{p+1} = 0)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_p = 1)$ et $\mathbf{P}(X_{p+1} = n)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_p = n-1)$.
c) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, exprimer $\mathbf{P}(X_{p+1} = k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_p = k-1)$ et $\mathbf{P}(X_p = k+1)$.
d) Rappeler pourquoi la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ existe au moins sur l'intervalle $[-1, 1]$. On note G_p la fonction génératrice de X_p, pourquoi G_p est-elle polynomiale ?
e) On admet que $G_{p+1}(t) = t\, G_p(t) + \dfrac{1-t^2}{n}\, G_p'(t)$ pour tous t et p.
Montrer que $\mathbf{E}(X_{p+1}) = 1 + \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)\mathbf{E}(X_p)$.
f) Déterminer $\mathbf{E}(X_p)$.

1280. *CCP.* *a)* Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ pour $n = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$.
b) On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \dbinom{n+k-1}{k} p^n q^k$ avec $p \in \,]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Montrer que la suite (p_k) définit une probabilité sur $\mathbb{N}$.
c) On définit la loi d'une variable aléatoire X par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = p_k$. Déterminer la fonction génératrice de X.
d) Calculer l'espérance et la variance de X.

Autres Écoles - PC

Algèbre

1281. *CCINP.*° Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. Montrer que j est racine de P. Déterminer sa multiplicité.

1282. *CCINP.*° Soit $P = X^3 + 2(4+5i)X^2 + (10-i)X + (3-11i) = 0$. Montrer que P possède une racine réelle. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

1283. *ENSEA.*° Déterminer les racines complexes de $X^2 - X + 1$, et montrer que $X^2 - X + 1$ divise $(X-1)^{n+2} + X^{2n} + 1$.

1284. *TPE.*° En factorisant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

1285. ° Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] ;\ P(0) = P'(0) = 0\}$. Donner $\dim E$.

1286. *IMT.*° Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Calculer $A^k + A^{-k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1287. *CCINP.* ° Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
a) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = \Delta$. Montrer que X et Δ commutent puis que X est diagonale.
b) Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1288. *IMT.*° On pose $B_{n,k} = X^k(1-X)^{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
a) Montrer que $(B_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à cette base.

1289. *TPE.*° Montrer que $P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$, et donner l'automorphisme réciproque.

1290. *CCINP.*° ***a)*** Pour $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire non nulle, préciser $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{rg} f$.
b) On note $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = 0$ si et seulement, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\operatorname{tr}(AE_{i,j}) = 0$.
c) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(AM) \in \mathbb{R}$. Montrer que $A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

1291. *IMT.*° Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que n est pair si et seulement s'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.

1292. *CCINP.*° Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire et surjective.
a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Vect}(x_0)$.
b) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $f \circ \varphi = \lambda f$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f$ est stable par φ.

1293. *CCINP.*° Soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(v \circ u)$ si et seulement si $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{0\}$.
b) Montrer que si $E = \operatorname{Ker}(v) + \operatorname{Im}(u)$, alors $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(v \circ u)$.

1294. *IMT.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que $\det A = 1$.

1295. *CCINP.*° Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Est-ce que A admet une racine carrée réelle ?

1296. *IMT.* Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, on pose $M(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.
a) Montrer que les matrices $M(a,b,c)$, pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, commutent entre elles.
b) Montrer que J est diagonalisable. Préciser ses éléments propres.
c) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que $M(a,b,c)$ est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

1297. *IMT.* Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer $\operatorname{rg} M$ et montrer que M est diagonalisable.
b) Calculer M^2 et donner le spectre de M.

1298. *CCINP.* Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $M_a = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer le rang de M_a. Qu'en déduire sur ses valeurs propres ?
b) Déterminer valeurs propres et sous-espaces propres de M_a.

1299. *IMT.* Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. *Ind.* Distinguer $a = e$ et $a \neq e$.

1300. *IMT.* Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin\varphi & \sin 2\varphi & 0 \end{pmatrix}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que A soit diagonalisable.

1301. *CCINP.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$.
a) Calculer M^2.
b) La matrice M est-elle diagonalisable ? En déterminer les éléments propres.

1302. *IMT.* On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto iz + (1-i)\overline{z}$.
a) Quelle est la base canonique de $\mathbb{C}$?
b) Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire. Donner sa matrice dans la base canonique.
c) L'application f est-elle diagonalisable ?

1303. *CCINP.* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^4 - 2M^3 + 2M^2 = 0$.
a) Soit λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$.
b) Montrer que $\operatorname{tr}(M)$ est un entier naturel pair.

1304. *IMT.* Soit $f : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto X(X-1)P(-1) + (X+1)(X-1)P(0) + X(X+1)P(1)$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
b) Soient $A = X(X-1)$, $B = (X+1)(X-1)$ et $C = X(X+1)$. Montrer que (A, B, C) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
c) Déterminer $\operatorname{Ker} f$. En déduire une valeur propre et un sous-espace propre associé.
d) Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$.
e) Soit P un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de f. Que peut-on dire du degré de P ? Préciser l'ensemble des valeurs propres et des sous-espaces propres de f.

1305. *IMT.* Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $f : P \in E \mapsto P(1)\,X - P(3)\,(25 - X^2)$.
a) Montrer que f définit un endomorphisme de E.
b) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
c) Déterminer les éléments propres de f.

1306. *Navale.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P - P' \in \mathbb{R}_n[X]$

a) Donner la matrice M de Φ dans la base canonique. La matrice M est-elle diagonalisable ?
b) Montrer que M est semblable à $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ où, pour tout i, $a_{i,i} = 1$, $a_{i,i+1} = -1$, les autres coefficients étant nuls.
c) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$. Exprimer P en fonction de Q et de ses dérivées.

1307. *CCINP.* Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que la trace et le déterminant de A sont nuls. Étudier la réciproque.

1308. *CCINP.* Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, $(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, $m_{i,j} = 1$ si $j > i$, $m_{i,j} = 2$ si $j < i$, $m_{i,i} = 0$. Soit, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $f_\lambda : x \in \mathbb{C} \mapsto \det(\lambda I_n - M + xJ)$.
a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que f_λ est polynomiale de degré $\leqslant 1$. Calculer $f_\lambda(1)$ et $f_\lambda(2)$. En déduire f_λ.
b) Déterminer χ_M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

1309. *Navale.* Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$.
a) Soit λ une valeur propre non nulle de AB. Montrer que c'est une valeur propre de BA.
b) Montrer que, si 0 est valeur propre de AB, c'est une valeur propre de BA.
c) En déduire une relation entre $\mathrm{Sp}\,(AB)$ et $\mathrm{Sp}\,(BA)$.
d) Soit $E = K[X]$. On considère les endomorphismes f et g de E définis par $f(P) = XP$ et $g(P) = P'$. Montrer que 0 est valeur propre de $f \circ g$. Est-ce une valeur propre de $g \circ f$?

1310. *CCINP.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et $\varphi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto X + \mathrm{Tr}(X)A$.
a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathrm{Vect}(A)$ puis que φ est bijective si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.
b) Déterminer les valeurs propres de φ.

1311. *TPE.* On se donne deux matrices A et B non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = M + (\mathrm{tr}\,AM)B$.
a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer $\dim \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$.
b) Est-ce que φ est diagonalisable ?

1312. *CCINP.* Soit Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ associe la matrice $\Phi(A) = (a_{n+1-i,n+1-j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
a) Déterminer $\Phi \circ \Phi$.
b) Exprimer $\Phi({}^tM)$ en fonction de $\Phi(M)$, $\Phi(AB)$ en fonction de $\Phi(A)$ et $\Phi(B)$.
c) Montrer que $\Phi(M)$ est inversible si et seulement si M est inversible.
d) Montrer que $\Phi(M)$ est diagonalisable si et seulement si M l'est.

1313. *CCINP.* Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que : $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$, $f(e_k) = \sum_{i\neq k} e_i$.
a) Montrer que f est diagonalisable.
b) Déterminer les valeurs propres de f.

1314. *CCINP. a)* Donner un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.
b) Donner un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont aucune matrice non nulle n'est diagonalisable.
c) Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.

1315. *CCINP.* Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, et f, g dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$.
a) Montrer que f admet une valeur propre.
b) Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

1316. *CCINP.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que (I_n, A, A^2) est libre et $A^3 = xI_n + yA + zA^2$ avec $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On pose $E = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2)$. Soit enfin $f : M \in E \mapsto AM$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
b) Donner la matrice de f dans la base (I_n, A, A^2) et justifier que $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{rg}(f - \lambda\mathrm{id}) \geqslant 2$.
c) On admet que $\chi_f(\lambda) = \lambda^3 - z\lambda^2 - y\lambda - x$.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé à racines simples.
d) Montrer que f et A ont les mêmes valeurs propres.
e) On suppose que $\chi_f(X) = (X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2}(X-\lambda_3)^{n_3}$ avec $\lambda_i \in]-1,1[$ pour $i \in \{1,2,3\}$ et $n_1 + n_2 + n_3 = n$.
  i) Montrer que la suite (f^k) converge vers 0 dans $\mathcal{L}(E)$.
  ii) Montrer que la suite (A^k) converge vers 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1317. *TPE.* Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\,\mathrm{d}x$.

1318. *CCINP.* Soient E un espace euclidien de dimension 3 et (i,j,k) une base orthonormée de E. Soit $V = (\mathrm{Vect}(i - 3k))^\perp$. Donner la matrice dans la base (i,j,k) de la projection orthogonale sur V.

1319. *CCINP.* Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Soient $h : x \in [0,1] \mapsto x\ln x$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_{a,b} : x \in [0,1] \mapsto x^2\,(\ln(x) - a - bx)^2$. Soit enfin $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$. On munit E du produit scalaire défini par :
$\forall (f,g) \in E^2, \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\mathrm{d}t.$
a) Justifier que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f_{a,b} \in E$.
b) Montrer que $h \in E$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\langle h, P_n\rangle$.
c) Calculer $\langle P_1, P_2\rangle$, $\|P_1\|$ et $\|P_2\|$.
d) Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que $Q_1 = \lambda P_1$ et $Q_2 = \dfrac{P_2 - \mu P_1}{\|P_2 - \mu P_1\|}$ forme une base orthonormée de F. Donner l'expression de la projection orthogonale de h sur F en fonction de Q_1 et Q_2. On notera g ce projeté.
e) On propose une autre méthode pour déterminer g.
Chercher $g = aP_1 + bP_2$ tel que $\int_0^1 x\,(h-g)\,(x)\mathrm{d}x = 0 = \int_0^1 x^2\,(h-g)\,(x)\mathrm{d}x$.
f) Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2\,(\ln(x) - a - bx)^2\,\mathrm{d}x$.

1320. *TPE.*◇ Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2$. Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée de E.

1321. *CCINP.* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $a \in E$ non nul.
On note $f_a : x \in E \mapsto x - 2\,\langle x, a\rangle\, a$.
a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f_a - \mathrm{id})$.
b) Calculer $f_a(a)$.

c) Montrer que f_a est diagonalisable.

1322. *CCINP.* Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \dfrac{1}{i+j+1}$.
a) Montrer que A est diagonalisable.
b) On pose, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X) = {}^tXAX$. Exprimer $\varphi(X)$ comme l'intégrale d'une fonction positive.

1323. *CCINP.* Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
On pose, pour $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(\alpha)\, Q^{(k)}(\alpha)$.
a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
b) Soit $f : P \in E \mapsto f(P) = (X - \alpha)P'(\alpha)$. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

1324. *CCINP.* On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique $\langle\cdot,\ \rangle$. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x) = \langle a, x\rangle\, b + \langle b, x\rangle\, a$ où a et b sont des vecteurs unitaires et libres de $\mathbb{R}^3$.
a) Montrer que u est un endomorphisme symétrique. Que peut-on en déduire ?
b) Donner $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que u n'est pas une projection orthogonale.

1325. *IMT.* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$.
a) Que peut-on dire des éventuelles valeurs propres de u ? Justifier.
b) Une isométrie vectorielle a-t-elle toujours une valeur propre réelle ?
c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Préciser la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1326. *CCINP.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n+1} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ où $a_{n+1,i} = a_{i,n+1} = 1$ pour $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$, les autres coefficients étant nuls. Montrer que A est diagonalisable. Diagonaliser A.

1327. *CCINP.* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $g \in \mathcal{O}(E)$ et $f = \mathrm{id} - g$.
Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$, puis l'égalité.

1328. *CCINP.* Soient $A \in \mathcal{M}_{5,10}(\mathbb{R})$ et $B = {}^tAA$.
a) Déterminer le format de la matrice B.
b) La matrice B est-elle diagonalisable ?
c) Montrer que 0 est valeur propre de B.

1329. *CCINP.* Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les autres coefficients étant nuls.
a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant n - 1$.
b) En déduire que A possède n valeurs propres distinctes.

1330. *TPE.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $(I_n + A)$ est inversible.

1331. *CCINP.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A\,{}^tAA = I_n$.
a) Montrer que A est symétrique.
b) Montrer que $A = I_n$.

1332. *IMT.* Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + {}^tA = I_n$.
a) Montrer que $A = I_n - {}^tA^2$.
b) Montrer que $(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = 0$.
c) Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A.
d) En déduire que A est symétrique.

Analyse

1333. *CCINP.* Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout (i,j), $a_{i,j} > 0$ et, pour tout i, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On admet que $\mathrm{rg}(A - I_n) = n - 1$. Si $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
a) Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_n)$.
b) Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant \|X\|$.
c) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.
d) On pose $B = A + I_n = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que, pour tout i, $b_{i,i} > \sum_{j \neq i} b_{i,j}$.
e) Montrer que B est inversible.
f) Montrer que (A^p) converge vers une matrice R, et que R est semblable à $\mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)$.

1334. *CCINP.* Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. On admet que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note aussi $\rho(A)$ le plus grand module des valeurs propres de A.
a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$. Calculer $\|A\|$ et $\rho(A)$.
b) Montrer que, si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leqslant \|A\|$.
d) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.
e) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose A diagonalisable. Montrer que (A^k) tend vers 0 si et seulement si $\rho(A) < 1$.

1335. *CCINP.*$^\diamond$ Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n^2}{n^2 + k^2}$.

1336. *CCINP.*$^\diamond$ *a)* Montrer que $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \ln n$.
On pose $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2}$ et $v_n = 1 - u_n$.
b) Montrer que, pour tout n, $u_n \in [1/2, 1[$.
c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2 - v_n}$, et en déduire que $v_n \leqslant \dfrac{2}{n+3}$.
d) Montrer que $\dfrac{1}{v_n} \leqslant \ln(n+2) + \dfrac{n+2}{2}$.
e) En déduire un développement asymptotique à deux termes de u_n.

1337. *IMT.* Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.
a) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

b) On pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{(u_{n+1})^\alpha} - \dfrac{1}{(u_n)^\alpha}$. Déterminer α pour que la suite (v_n) converge vers une limite réelle non nulle.
c) On admet le théorème de Cesàro. Déterminer un équivalent de u_n.

1338. *CCINP.* ***a)*** Nature, suivant $a \in \mathbb{R}$, de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^a}\right)$?
b) Nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{\operatorname{sh}(1/n)}{\sin(1/n)}\right)$?

1339. *IMT.* Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \ln^3(n)}$?

1340. *TPE.* Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$. *Ind.* Utiliser $\tan(a-b)$.

1341. *IMT.* Soient $\alpha \geqslant 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$. Étudier la nature de $\sum \dfrac{1}{S_n}$.

1342. *IMT.* Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.
a) Déterminer la limite de la suite (u_n).
b) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = nu_n$.
c) Quelle est la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$?

1343. *IMT.* Soit u la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
a) Étudier la suite u.
b) Donner la nature des séries $\sum (-1)^n u_n$, $\sum u_n^2$. et $\sum u_n$.

1344. *TPE.* Soit u la suite définie par la relation $u_{n+1} = \sin u_n$, avec $u_0 \in]0,1[$.
a) Montrer que u converge et donner sa limite.
b) Calculer $\lim \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de $\sum u_n^3$.
c) Donner la nature $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire la nature de $\sum u_n^2$.

1345. *CCINP.* Soit (S_k) la suite de $\mathbb{R}[X]$ définie par $S_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ S_k = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$.
a) i) Calculer S_1, S_2, S_3. Quel est le degré de S_n ?
ii) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(S_0, S_1, \dots, S_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
iii) Calculer $S_k(n)$ pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$.
b) Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. On écrit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k S_k(X)$.
i) Montrer que $\forall n \geqslant m$, $\dfrac{P(n)}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{(n-k)!}$.
ii) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}$ converge et exprimer sa somme en fonction des a_k.

c) Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{n!}$ pour $p \geqslant 2$ et calculer sa somme.

1346. *CCINP.* On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$, $v_n = (-1)^n u_n$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On admet que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
a) Étudier les variations de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
b) Comparer u_n et $1/n$. Nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$?
c) Montrer que $S_{2n} - S_n = \ln(2)\ \ln(n) + \dfrac{(\ln(2))^2}{2} + o(1)$.
d) Exprimer $S_{2n} + T_{2n}$ à l'aide de S_n et de T_n. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

1347. *IMT.* Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs.
Soit (x_n) la suite définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n^2 + u_n})$.
a) On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que la suite (x_n) converge.
b) On suppose que la suite (x_n) converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

1348. *IMT.* Soient a et b strictement positifs. Trouver $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1349. *IMT.* Soit $E = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+t) f(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
b) Calculer $\Phi(\sin)$ et $\Phi(\cos)$.
c) Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

1350. *CCINP.* Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a > 0,\ 2a\,f(x) = \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f$.

1351. *CCINP.* Soit E l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit φ l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $g = \varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f'(x) - x\,f(x)$.
a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
b) Résoudre $y'(x) - xy(x) = 0$. En déduire $\operatorname{Ker}(\varphi)$. L'application φ est-elle injective ?
c) Montrer que φ est surjective.

1352. *CCINP.* Soit $f : x \in\mapsto x\sqrt{\dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor}$.
a) Montrer, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leqslant |x|$.
b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f son prolongement.
c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
d) En quels point de $\mathbb{R}^+$ l'application f est-elle continue ?

1353. *CCINP.* Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)\,\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1[$.

1354. *IMT.* Soit $a > 0$. Donner la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^a}\,\mathrm{d}x$.

1355. *CCINP.* Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$. Calculer I.

1356. *CCINP.* Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+\sqrt{x^2-1})^n}$ converge-t-elle ? Donner alors sa valeur.

1357. *CCINP.* On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{1-\cos^n(t)}{t^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f_n est prolongeable par continuité en 0.

b) Montrer que u_n existe et que $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}|s|$.
En déduire la valeur de u_2.

1358. *CCINP.* Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{x-\frac{1}{2}-\lfloor x\rfloor}{x}\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer I_k.

b) On pose $J_n = \displaystyle\int_1^n \frac{x-\frac{1}{2}-\lfloor x\rfloor}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $J_n = n + (n+\frac{1}{2})\ln(n+1) - \ln n!$.

c) Montrer que $\ln n! = n\ln n - n + \ln n + \dfrac{1}{2}\ln 2\pi + o(1)$.

d) Montrer que $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

e) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-\frac{1}{2}-\lfloor x\rfloor}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

1359. *CCINP.* Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ telle que $\forall x > 0,\ f(x+1) = x\,f(x)$ et $f''(x) > 0$.

a) Énoncer le théorème de Rolle.

b) ***i)*** Expliciter $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Montrer qu'il existe $\alpha \in]1,2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. En déduire les variations de f sur $]0,+\infty[$.

c) ***i)*** Montrer que f est de signe constant sur $]0,+\infty[$; déterminer son signe.

ii) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

d) Préciser la nature des intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, ***ii)*** $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, ***iii)*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

1360. *Navale.* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_n : x \mapsto n^\alpha x^2 e^{-nx}$ et $g_n : x \mapsto n^\alpha x \sin x e^{-nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Étudier la convergence simple et uniforme des suites (f_n) et (g_n) sur $\mathbb{R}^+$.

1361. *CCINP.* Soit, pour $n \geqslant 1$, $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$. Étudier la convergence simple/uniforme/normale sur $\mathbb{R}$ de $\sum f_n$.

1362. *IMT.* On veut déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telles que $(*)$:
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(2x) = f(x) + x\ln x$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $u_k : x \mapsto \dfrac{1}{2^k}\ln\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.

a) Montrer que $\sum u_k$ converge simplement sur $]0;+\infty[$. On note $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$. Exprimer f en fonction de $f(0)$ et de S.

c) Conclure.

1363. *CCINP.* Montrer l'existence de $f : x \in]0,+\infty[\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} nx}$, puis déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

1364. *CCINP.* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais qu'il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Montrer que $f-1$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer son intégrale à l'aide de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

d) Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

e) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x}\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x}\mathrm{d}t$.

f) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donner un équivalent de f en 0.

1365. *CCINP.* Pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$, on pose $u_n(x) = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^x}\right)$.

a) Soit $t > -1$. Montrer que $\ln(1+t) \leqslant t$.

b) Montrer que, si $x > 0$, la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 2}$ converge. On note $u(x)$ sa limite. Quelle est la valeur de $u(x)$ lorsque $x \in]0,1]$?

c) Soit $a > 1$. Montrer que $\sum \ln\left(1-\dfrac{1}{k^x}\right)$ est normalement convergente sur $]a,+\infty[$. En déduire que u est continue sur $]1,+\infty[$.

d) Montrer que u est continue sur $]0,+\infty[$.

1366. *CCINP.* Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{n^n}{n!}x^n$.

1367. *CCINP.* Soient (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \ln(n)$ et $b_n = \ln(n!)$.
Déterminer les rayons de convergence de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.

1368. *IMT.* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(n)}{n(n+1)}\,x^n$.

a) Donner un équivalent de $\operatorname{sh}(n)$.

b) Donner le domaine de définition de f.

1369. *TPE.* On pose $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin t}\,dt$. Montrer que g est développable en série entière autour de 0 sur $\mathbb{R}$, et exprimer les coefficients de ce développement à l'aide des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$.

1370. *CCINP.* Soient $\varphi : t \mapsto e^{e^t-1}$ et $(p_n)_{n\geqslant 0}$ la suite réelle définie par $p_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$.

a) On admet que $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + t + t^2 + \frac{5}{6}t^3 + o(t^3)$. Donner $\varphi^{(n)}(0)$ pour $n \in \{0,1,2,3\}$.
b) Calculer p_1, p_2, p_3. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leqslant n!$.
c) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.
d) Montrer que $f'(x) = e^x f(x)$. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \varphi^{(n)}(0)$.
e) Montrer que p_n est égal au nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1371. *CCINP.* On définit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}$, puis l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{n!}$.
a) Calculer $v_0, \dots, v_3$.
b) Exprimer v_{n+1} à l'aide de v_n et de n.
c) En déduire que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge, et donner sa limite.
d) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$. On note S sa somme.
e) Donner une équation différentielle vérifiée par S.

1372. *IMT.* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{du}{1+u^n}$.
a) Calculer I_0, I_1 et I_2.
b) Déterminer la limite de (I_n).

1373. *CCINP.* On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^n}\,dt$. Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite éventuelle de la suite (I_n).

1374. *CCINP. a)* Énoncer le théorème de convergence dominée.
b) Déterminer la limite de $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$.
c) Énoncer le théorème de continuité des intégrales à paramètre et le démontrer à partir du théorème de convergence dominée.

1375. *CCINP.* Soit $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.
a) Déterminer le domaine de définition de F.
b) Calculer $F(1/2)$. *Ind.* Poser $t = u^2$.

1376. *CCINP.* Soient $D = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ et $I : x \mapsto \int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)d\theta$.
a) Soit $x \in D$. Montrer que $\theta \in [0;\pi] \mapsto \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right)$ est définie et continue. En déduire que I est définie sur D.
b) Soit $x \in D \setminus \{0\}$. Montrer que $I(1/x) = I(x) - \pi\ln(x^2)$.
c) Montrer que I est paire.
c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer $X^4 - 2X^2\cos\theta + 1 = \left(X^2 + 2X\cos(\theta/2) + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos(\theta/2) + 1\right)$.
d) En déduire que, pour $x \in D$, $I(x^2) = 2I(x)$.

1377. *CCINP.* Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$. Montrer que f est continue, puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1378. *IMT.* Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(tx)}{t} e^{-t}\,dt$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
b) Donner une expression de f' puis une expression de f.

1379. *IMT.* On pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x\sin t}\,dt$.
a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$.
c) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

1380. *CCINP.* Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que la suite (H_n) est croissante et déterminer sa limite.
Soit $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}\,du$.
b) Montrer que F est définie et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
c) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x+1) - F(x)$ et en déduire $F(n)$ en fonction de H_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
d) Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,dt$.
e) En déduire que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1+x)$.

1381. Soient $g : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ et $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} g(x,t)\,dt$.
a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $t \mapsto g(x,t)$ quand $t \to 0$.
b) Déterminer le domaine de définition D de f.
c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et expliciter f'.
d) On fixe $x \in D$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : t \mapsto \sin(xt)\,e^{-nt}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
e) Soit $x \in D$. Exprimer $f(x)$ sous forme de somme.

1382. *IMT.* Soit $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}dx$.
a) Préciser le domaine de définition D de F. Montrer que F est continue sur D.
c) L'application F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
d) Calculer F.

1383. *CCINP.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pose $\hat{f} : u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2i\pi ux} \mathrm{d}x$.

a) Montrer que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée.
b) Montrer que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
c) On suppose que $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
d) Soient $t > 0$ et $\hat{f}_t : u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi ux} \mathrm{d}x$. Montrer que $\hat{f}_t$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$.
e) Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $\hat{f}_t$.

1384. *IMT.* ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^1 x^{3n+1} \mathrm{d}x$.
b) Montrer la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$.

1385. *TPE.* Montrer l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

1386. *IMT.* ***a)*** Calculer $\int_0^1 t^n (\ln t)^n \,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que $\int_0^1 t^{-t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

1387. *CCINP.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin(nx)\, \mathrm{d}x$ et $b_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, \mathrm{d}x$.
a) Justifier l'existence de a_n et de b_n. Calculer a_0, a_1, a_2.
b) Calculer $|1 + e^{ix} \cos x|$ et montrer que $1 + e^{ix} \cos x \neq 0$.
c) Montrer que (b_n) tend vers 0.
On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.
d) Montrer que $S_n = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + e^{ix} \cos x} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-e^{ix} \cos x)^{n+1}}{1 + e^{ix} \cos x} \mathrm{d}x \right)$.
e) Montrer que $\sum (-1)^n a_n$ converge et calculer sa somme.
f) Montrer que, pour tout n, $a_n \geqslant 0$. *Ind.* On pourra intégrer par parties.

1388. *CCINP.* Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} \mathrm{d}t$.
a) Montrer que I est convergente.
b) Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$.

1389. *CCINP.* On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} \mathrm{d}x$.

1390. *IMT.* ***a)*** Justifier, pour $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $I_n = \int_0^1 t^n (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t$. Calculer I_n.

b) On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \mathrm{d}t$. Montrer la convergence de cette intégrale.
c) Justifier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et montrer que $I = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

1391. *CCINP.*$^\diamond$ Résoudre $y'' - 4y' + 13y = 0$.

1392. *ENSEA.*$^\diamond$ Résoudre l'équation différentielle $x'' + 6x' + 9x = 2te^{-3t}$.

1393. *IMT.*$^\diamond$ Résoudre $|x|y' + (x-1)y = x^2$

1394. *IMT.*$^\diamond$ Résoudre $\left(x' = x - 8y + te^{-t}\ ;\ y' = 2x + y + e^{-2t}\right)$.

1395. *IMT.* On considère l'équation différentielle (E) : $t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0$ sur $]0, +\infty[$.
a) Donner une base de l'espace des solutions. On cherchera des solutions de la forme $t \mapsto t^r$.
b) Résoudre $t^2 x'' - 2tx' + 2x = 1 + t^2$ sur $]0, +\infty[$.

1396. *IMT.* Soit (E) l'équation différentielle $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.
a) Pour quelles valeurs de α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle solution sur un intervalle de longueur strictement positive ?
b) Résoudre (E) sur $]0, 1[$.
c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

1397. *TPE.* Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f''(x) + f'(x) + x f(x) = 0$.

1398. *CCINP.* Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}$.
a) Montrer que le rayon de convergence de f est infini.
b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E) : ty'' + y' - y = 0$.

1399. *CCINP.* ***a)*** Calculer les parties réelle et imaginaire de $\frac{1}{x+i}$ (avec $x \in \mathbb{R}$).
b) En déduire les solutions de l'équation $(E) \quad y' + \frac{1}{2(x+i)} y = 0$.
c) On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}\, e^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.
i) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
ii) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale.
d) Montrer que f est solution de l'équation (E).
e) Soit $I : \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$. Montrer que I est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Exprimer I en fonction de f. En déduire le signe de I.

1400. *CCINP.* ***a)*** Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $tx' - x = 0$. Dans la suite, on considère une fonction f satisfaisant sur $]0, +\infty[$ à l'identité $tf'(t) - |1 - f(t)| = 1$.
b) Montrer que f est strictement croissante.
c) On suppose par l'absurde que f est minorée par 1. Donner la limite de f en 0 et conclure.

d) Montrer que f ne peut être majorée par 1.
e) Montrer qu'il existe un unique $t_0 > 0$ tel que $f(t_0) = 1$.
f) Résoudre l'équation donnée.

1401. *IMT.* Soit (E) l'équation différentielle $(1-x)y' - y = \dfrac{1}{1-x}$.
a) Résoudre (E) sur $]-\infty; 1[$.
b) Justifier que les solutions de (E) sont développables en série entière au voisinage de 0.
c) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence > 0 et solution de (E). Comment retrouver les coefficients a_n ?

1402. *CCINP. a)* Montrer que $\dfrac{e^{-1/t}}{t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
En déduire l'existence de l'application $h : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t} \mathrm{d}t$.
b) On considère sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle (E) : $x^2 y' + y = x$. Montrer que l'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{1/x} + e^{1/x} h(x),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
c) Montrer que $e^{1/x} h(x) = x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} \mathrm{d}u$.
Ind. Effectuer le changement de variable $t = \dfrac{x}{1+ux}$.
d) Montrer que $g : x \mapsto x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} \mathrm{d}u$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.

1403. *CCINP.* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \ \mathrm{d}t$. Soit (E) l'équation différentielle $(x^2-1)y'' + 3xy' + y = 0$. On admet que, pour $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
a) Montrer que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
b) Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_{2n} x^{2n}$ et de $\sum u_{2n+1} x^{2n+1}$.
On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} x^{2n}$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} x^{2n+1}$.
c) Vérifier que f et g sont solutions de (E) sur $]-1, 1[$.
d) Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x \cos t}{1 - x^2 \cos^2 t} \mathrm{d}t$.

1404. *CCINP.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.
a) Montrer que f se prolonge par continuité en $(0,0)$.
b) La fonction f ainsi prolongée est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

1405. *CCINP.* Étudier les extrema locaux et globaux de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

1406. *IMT.* Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

Géométrie

1407. *TPE.* Tracer l'arc paramétré $(x(t) = 2\cos t - \sin t\ ;\ y(t) = (2\cos t - \sin t)\sin t)$.

Probabilités

1408. *CCINP.* Au péage d'une autoroute, 12 guichets sont ouverts. Les voitures qui se présentent à ce péage se répartissent aléatoirement sur ces guichets, indépendamment les unes des autres. On note X le nombre de voitures arrivant au péage au cours d'une journée et on supppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note Y le nombre de voitures se présentant au guichet numéro 12.
a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $(X = n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

1409. *Navale.* Dans un jeu de pile ou face, la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0, 1[$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois Pile. Donner la loi de X.

1410. *CCINP.* Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Y = (-1)^X$.

1411. *CCINP.*$^\diamond$ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{x_0, \dots, x_n\}$, où les x_i sont des réels distincts. On pose $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$.
a) On suppose $n = 2$ et $x_i = i$. Calculer les p_i en fonction de $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$.
b) Dans le cas général, calculer les p_i en fonction des $\mathbf{E}(X^k)$, $k = 1 \dots, n$.

1412. *IMT.* Soient $a \in \mathbb{R}$ et $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. Soient X et Y deux variables aléatoires entières telles que $\mathbf{P}(X = k, Y = n) = \dbinom{n}{k} a^n p^k q^{n-k}$ si $k \leqslant n$, et 0 sinon.
Déterminer la valeur de a, les lois de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
Ind. Utiliser le développement en série entière de $(1-x)^{-(k+1)}$ pour calculer $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

1413. *Navale.* Une pièce tombe sur pile avec la probabilité $2/3$. Soit X la variable aléatoire dénombrant les lancers nécessaires à l'obtention de deux piles consécutifs.
a) Calculer $\mathbf{P}(X = 2)$, $\mathbf{P}(X = 3)$, $\mathbf{P}(X = 4)$.
b) Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \geqslant 2$.

1414. *CCINP.* On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note P_n l'événement « on obtient pile au n-ième lancer » et F_n l'événement « on obtient face au n-ième lancer ».
On note Y la variable aléatoire donnant le premier rang d'apparition de la séquence PPF (le rang est le rang du face), Y étant égal à 0 si cette séquence n'apparaît jamais. On pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ si $n \geqslant 3$, puis $U_n = \bigcup_{n \geqslant 3} B_n$, et enfin $u_n = \mathbf{P}(U_n)$, avec $u_1 = u_2 = 0$.
a) Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est monotone, et en déduire qu'elle converge. On note l sa limite.
b) Calculer $\mathbf{P}(B_n)$. Montrer que B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles. Calculer u_3, u_4 et u_5.
c) Montrer que $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Exprimer $\mathbf{P}(U_n \cap B_{n+1})$ en fonction de u_{n-2}.
d) Montrer que $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ et calculer l.
e) Calculer $\mathbf{P}(Y = 0)$. Commenter.

1415. *a)* Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbf{E}(X) = +\infty$ et que $\mathbf{E}(\ln X) < +\infty$.

1416. Soit (X_k) une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que, pour tout k, $\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbf{E}(\sin(X_k t))$ et $\mathbf{E}(\cos(X_k t))$.
b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(\cos(S_n t)) = (\cos t)^n$.

1417. *CCINP.* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi qui admettent une espérance et une variance. On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
a) Calculer $\mathbf{E}(X - Y)$ et exprimer $\mathbf{V}(X - Y)$ en fonction de $\mathbf{V}(X)$.
b) *i)* Montrer que $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)^2$.
ii) Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$ si X et Y suivent une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.
c) Dans cette question, X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
i) Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.
ii) Déterminer la loi de $Z = X - Y$.
d) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que, si $X(\Omega) \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, alors $\mathbf{P}(X = Y) \geqslant \frac{1}{n}$.
e) Montrer que $\mathbf{P}(X = Y) \geqslant 1 - 2\mathbf{V}(X)$.

Questions & réponses

Les projets de questions et de réponses peuvent être envoyés, (manuscrits ou tapuscrits) à l'adresse : Epistemon(RMS) , à l'attention d' Alain Tissier, 2 ter rue des Chantiers 75005 PARIS.
Si vous voulez utiliser un fichier .PDF, vous pouvez l'envoyer à l'adresse électronique : *QR@rms-math.com*. Indiquer le sigle [RMS] dans l'objet de votre courriel. Si vous utilisez une source latex, vous pouvez la joindre. Prière de ne pas faire figurer plusieurs projets de questions ou réponses dans un même document.
Les questions ne sont pas nécessairement complètement résolues et les réponses partielles sont alors souhaitées. N'hésitez pas non plus à proposer toutes variantes ou prolongements qui viendraient renforcer l'intérêt de la question.
Sur le site de la RMS les lecteurs peuvent consulter la liste des questions posées depuis deux ans et pour lesquelles nous attendons des réponses.

Questions

Q993. On considère les suites finies $(a_1, \ldots, a_p)$ de réels telles que $\forall i, 0 \leqslant a_i \leqslant i$.

a) Prouver qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute suite vérifiant les conditions ci-dessus, on a

$$\sum_{k=1}^{p} a_k \leqslant C\Big(\sum_{k=1}^{p} k a_k\Big)^{2/3}$$

b) Montrer qu'on ne peut pas diminuer l'exposant $\frac{2}{3}$.

c) Déterminer la plus petite constante C vérifiant l'inégalité ci-dessus pour toute les suite finies $(a_1, \ldots, a_p)$. (Richard Antetomaso)

Q994. On note, pour toute suite (a_k) d'entiers strictement positifs, $[(a_k)]$ la fraction continue $a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}}$.
Soit I une partie finie de $\mathbb{N}^*$. On note K_I l'ensemble des $[(a_k)]$ tels que chaque a_k est élément de I. Montrer que K_I est un compact de mesure nulle. (Alain Rémondière)

Q995.

a) Peut-on caractériser les polynômes unitaires P à coefficients entiers tels que pour tout p premier il existe un entier a tel que p divise $P(a)$?