Familles sommables [61]

On considère une famille de réels *positifs* indexée par l'ensemble dénombrable $I = \mathbb{N}^2$.

❧ Dans un premier temps, nous allons démontrer que cette famille est sommable en appliquant le premier théorème de Fubini à la partition

$$I = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

où $I_n = \big\{(i,j) \in I \;:\; i+j = n\big\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (tranches diagonales).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble d'indices I_n est fini, donc on peut poser

$$s_n = \sum_{(i,j) \in I_n} a_{i,j}.$$

Quel que soit $(i,j) \in I_n$, le terme $a_{i,j}$ est toujours égal à $n/2^n$ et comme l'ensemble I_n compte $(n+1)$ indices :

$$(0,n), (1,n-1), \dots, (n-1,1), (n,0)$$

on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \frac{n(n+1)}{2^n}.$$

On en déduit que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+2}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

ce qui prouve que la série $\sum s_n$ est absolument convergente (règle de D'Alembert), c'est-à-dire que la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

D'après le premier théorème de Fubini, la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in I}$ est donc sommable.

❧ Comme la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in I}$ est sommable, on peut appliquer le second théorème de Fubini pour calculer la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{(i,j) \in I_n} a_{i,j} \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n} \\
&= \frac{1}{(1-1/2)^3} = 8
\end{aligned}$$

d'après **[59]**.

REMARQUE.— On peut aussi appliquer le cours sur les **séries entières**. On sait que

$$\forall\, t \in \left]-1,1\right[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut dériver deux fois terme à terme :

$$\forall\, t \in \left]-1, 1\right[, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$$

et en particulier pour $x = 1/2$,

$$16 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^k}.$$

❧ On peut aussi calculer la somme en appliquant le second théorème de Fubini avec d'autres partitions de I.

Pour tout $(i, j) \in I$, on pose

$$b_{i,j} = \frac{i}{2^{i+j}} \quad \text{et} \quad c_{i,j} = \frac{j}{2^{i+j}}$$

de telle sorte que

$$\forall\, (i,j) \in I, \quad 0 \leqslant b_{i,j} \leqslant a_{i,j} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c_{i,j} \leqslant a_{i,j}.$$

Comme la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ est sommable, on en déduit que les deux familles $(b_{i,j})_{(i,j)\in I}$ et $(c_{i,j})_{(i,j)\in I}$ sont sommables (théorème de comparaison).

En appliquant le second théorème de Fubini, on obtient

$$\sum_{(i,j)\in I} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i}{2^{i+j}}\right)$$

(partition de I au moyen des $K_i = \{(i,j),\ j \in \mathbb{N}\}$, tranches verticales) ainsi que

$$\sum_{(i,j)\in I} c_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{j}{2^{j+i}}\right)$$

(partition de I au moyen des $L_j = \{(i,j),\ i \in \mathbb{N}\}$, tranches horizontales). Les indices étant muets, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I} b_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I} c_{i,j} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{2^{i-1}}\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i+1}{2^i}.\end{aligned}$$

D'après **[56.2]**, cette somme est égale à $2^2 = 4$ et finalement

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I} b_{i,j} + \sum_{(i,j)\in I} c_{i,j} = 2 \times 4 = 8.$$

❧ Au lieu de **[56.2]**, on peut aussi appliquer le cours sur les séries entières :

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$$

et en particulier pour $x = 1/2$

$$4 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}}.$$