Séries numériques

❧ Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x > 0$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x} = \frac{1}{n^2 x} \cdot \Big(\frac{1}{1 + \frac{1}{nx}}\Big).$$

Il est clair que

$$\forall\, z > 0, \quad 1 - z \leqslant \frac{1}{1+z} \leqslant 1$$

et donc que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x > 0, \quad \frac{1}{n^2 x} - \frac{1}{n^3 x^2} \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2 x}.$$

En sommant sur n, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{\zeta(2)}{x} - \frac{\zeta(3)}{x^2} \leqslant G(x) \leqslant \frac{\zeta(2)}{x}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x > 0, \quad \Big|G(x) - \frac{\zeta(2)}{x}\Big| \leqslant \frac{\zeta(3)}{x^2}$$

et donc en particulier que

$$G(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\zeta(2)}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

❧ La fonction

$$\Big[t \mapsto \frac{1}{t + t^2 x}\Big]$$

est évidemment continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Pour tout entier $N \geqslant 1$,

$$\int_1^N \frac{dt}{t(1+tx)} = \int_1^N \Big(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+xt}\Big)\, dt = \ell n\Big(\frac{N}{1+xN} \cdot \frac{1+x}{1}\Big)$$

donc

$$\lim_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{dt}{t(1+tx)} = \ell n\, \frac{1+x}{x} = \ell n\Big(1 + \frac{1}{x}\Big).$$

En comparant *(faire une figure !)* la somme partielle

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k + k^2 x} \quad \text{à l'intégrale} \quad \int_1^N \frac{dt}{t + t^2 x}$$

et en faisant tendre ensuite N vers $+\infty$, on obtient que

$$\forall\, x > 0, \quad \ell n\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) \leqslant G(x) \leqslant \ell n\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) + \frac{1}{x+1}.$$

Cet encadrement prouve seulement que $G(x)$ est compris entre $1/x$ et $2/x$ lorsque x tend vers $+\infty$, c'est moins précis que l'équivalent trouvé plus haut.