❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+x)n!}.$$

Il est clair que

$$\forall\, x > 0, \quad u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n!}\Big)$$

et comme la série de Poisson $\sum {}^1\!/_{n!}$ est absolument convergente, on déduit du théorème de comparaison que la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente.

REMARQUE.— On peut aussi déduire la convergence de la série $\sum u_n(x)$ du Critère spécial des séries alternées. De cette manière, on ne prouve pas que la série est absolument convergente, mais on obtient facilement une estimation du reste d'ordre n.

1. Pour $|h| \leqslant {}^1\!/_2$, on a $1 + h > 0$. Les réels $S(1+h)$ et $S(1)$ sont donc les sommes de deux séries convergentes. Par linéarité de la somme,

$$\begin{aligned} S(1+h) - S(1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\Big[\frac{1}{n+1+h} - \frac{1}{n+1}\Big] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{h}{(n+1)(n+1+h)}. \end{aligned}$$

Comme $|h| \leqslant {}^1\!/_2$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n+1+h \geqslant \frac{1}{2}$$

et par conséquent

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,\frac{h}{(n+1)(n+1+h)}\right| \leqslant \frac{2}{(n+1)!}\,|h|$$

ce qui prouve que

$$\forall\, |h| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \big|S(1+h) - S(1)\big| \leqslant K\,|h|$$

où K est la somme d'une série convergente :

$$K = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)!}.$$

❧ Cette propriété qui ressemble à la propriété de Lipschitz (mais qui n'est pas la propriété de Lipschitz) montre que la fonction S est continue au point $x = 1$.

2. Par linéarité de la somme, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} xS(x) - S(x+1) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1+x)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n+1)!(n+1+x)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n!(n+x)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Cela prouve que l'expression $xS(x) - S(x+1)$ est bien indépendante de $x > 0$.

3. On a démontré que S était continue au point $x = 1$. Par composition de limites, $S(1+x)$ tend donc vers $S(1)$ lorsque x tend vers 0 et l'identité précédente permet alors de conclure que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} xS(x) = S(1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

REMARQUE.— On a remarqué plus haut que les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées étaient satisfaites. En particulier,

$$\forall\, x > 0, \quad \left|S(x) - \frac{1}{x}\right| = \left|R_0(x)\right| \leqslant \left|u_1(x)\right| = \frac{1}{1+x} \leqslant 1.$$

Cela prouve en particulier (et sans effort) que

$$S(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + \mathcal{O}(1),$$

ce qui est plus précis que l'équivalent précédent !

4. D'après l'identité établie au **[2.]**,

$$\begin{aligned}S(x) &= \frac{C}{x} + \frac{S(x+1)}{x} \\ &= \frac{C}{x} + \frac{C}{x(x+1)} + \frac{S(x+2)}{x(x+1)} \\ &= \frac{C}{x} + \frac{C}{x(x+1)} + \frac{C}{x(x+1)(x+2)} + \frac{S(x+3)}{x(x+1)(x+2)}.\end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+x)n!}\right| \leqslant \frac{1}{x\, n!}.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, x > 0, \quad \left|S(x)\right| \leqslant \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

et en particulier

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

ce qui prouve que

$$\frac{S(x+3)}{x(x+1)(x+2)} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big).$$

Par ailleurs, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{x^2} \cdot \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{-1} = \frac{1}{x^2} \cdot \Big[1 - \frac{1}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\ \frac{1}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{1}{x^3} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)\end{aligned}$$

et finalement

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{C}{x} + \frac{C}{x^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)$$

(*sans* terme en $1/x^3$).