Familles sommables

✍ *Dans l'écriture d'une somme, l'indice de sommation est une variable muette (tout comme la variable d'intégration dans une intégrale).*

Il suffit de changer d'indice de sommation pour brouiller toutes les pistes et il devient alors difficile de deviner quel chemin a été suivi pour parvenir au résultat.

Cependant, quand il est question de familles sommables, la méthode générale est claire : on passe forcément par les Théorèmes de Fubini !

Et si on se perd au milieu des indices, il faut oser changer les indices de sommation afin d'y voir plus clair. Quand on a osé une fois, on hésite beaucoup moins avant de recommencer !

MÉTHODE GÉNÉRALE.—

Dans un premier temps, pour démontrer que la famille

$$(u_{k,p})_{(k,p)\in A}$$

est sommable, on applique le Premier théorème de Fubini à la famille des *réels positifs*

$$a_{k,p} = |u_{k,p}|.$$

On peut ensuite appliquer le Second théorème de Fubini pour calculer la somme

$$\sum_{(k,p)\in A} u_{k,p}$$

en utilisant une (ou plusieurs) partition(s) de l'ensemble d'indices A.

$\boxed{\textbf{1.}}$ On suppose pour commencer que la famille $(u_{k,p})_{(k,p)\in A}$ est *sommable*, ce qui nous permet d'appliquer le Second théorème de Fubini.

► Avec les deux applications

$$f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{N}^* \\ (k,p) & \mapsto & kp \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{N}^* \\ (k,p) & \mapsto & k \end{array}$$

on définit deux partitions de A.

D'une part, les lignes de niveau de f :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n &= \big\{(k,p) \in A \;:\; kp = n\big\} \\ &= \big\{(k, n//k),\ k \in D_n\big\} \end{aligned}$$

où D_n désigne l'ensemble des diviseurs de n et $n//k$, le quotient de la division euclidienne de n par k (le reste $n\%k$ est nul puisque $k \in D_n$).

D'autre part, les lignes de niveau de g :

$$\begin{aligned} \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad J_k &= \big\{(k,p) \in A \;:\; g(k,p) = k\big\} \\ &= \big\{(k,p),\ p \in \mathbb{N}^*\big\} \end{aligned}$$

ce qui revient à découper A en tranches verticales (l'abscisse k étant fixée).

► Nous allons appliquer le Second théorème de Fubini à ces deux partitions.

▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut poser

$$s_n = \sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}$$

(en tant que somme d'une sous-famille d'une famille sommable).

D'après le Second théorème de Fubini, la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi sommable, ce qui signifie que la série $\sum s_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} s_n = \sum_{(k,p)\in A} u_{k,p}. \tag{$*$}$$

✍ *Il est essentiel de se souvenir qu'une famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum z_n$ est absolument convergente et que la somme de la famille sommable est alors égale à la somme de la série absolument convergente :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n.$$

(On doit avoir compris qu'il est en général facile de prouver qu'une série est absolument convergente !)

▷ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut poser

$$t_k = \sum_{(k,p)\in J_k} u_{k,p}$$

(en tant que somme d'une sous-famille d'une famille sommable).

D'après le Second théorème de Fubini, la famille $(t_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi sommable, ce qui signifie que la série $\sum t_k$ est absolument convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} t_k = \sum_{(k,p)\in A} u_{k,p}. \tag{$**$}$$

✍ *On a fait deux fois la même chose (exactement la même chose !), seule la partition choisie pour appliquer le Théorème de Fubini a changé.*

Avec les relations $(*)$ et $(*)$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{k,p}\right)}_{t_k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right)}_{s_n}.$$

REMARQUE.— On peut alors remplacer l'indice k par l'indice n dans le membre de gauche (pour égarer le lecteur).

2. Changeons les indices ! On considère la famille complexe définie par

$$\forall\,(k,p)\in A,\quad u_{k,p} = x^{kp}$$

et, afin de démontrer que cette famille est sommable au moyen du Premier théorème de Fubini, on considère la famille de réels positifs définie par

$$\forall\,(k,p)\in A,\quad a_{k,p} = |x^{kp}| = |x|^{kp}.$$

► On applique le Premier théorème de Fubini avec la partition $(J_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$

✍ *Pourquoi cette partition précisément ? Parce qu'on a essayé au brouillon et qu'on a constaté que ça marchait !*

▷ Pour tout indice $k \geqslant 1$ fixé,

$$a_{k,p} = \left(|x|^k\right)^p$$

est le terme général d'une série géométrique de raison $0 \leqslant |x|^k < 1$ (puisque $|x| < 1$). Comme la série $\sum_p a_{k,p}$ est absolument convergente, la famille

$$(a_{k,p})_{(k,p)\in J_k}$$

est sommable.

▷ On pose alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \tau_k = \sum_{(k,p)\in J_k} a_{k,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{k,p} = \frac{|x|^k}{1-|x|^k}.$$

Comme $|x| < 1$, on en déduit que

$$\tau_k \underset{k\to+\infty}{\sim} |x|^k$$

ce qui prouve que la série $\sum \tau_k$ est absolument convergente et donc que la famille $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

▷ Les conditions d'application du Premier théorème de Fubini étant vérifiées, on en déduit que la famille

$$(a_{k,p})_{(k,p)\in A}$$

est sommable, c'est-à-dire que la la famille

$$(u_{k,p})_{(k,p)\in A}$$

est sommable.

✍ *Pour bien mesurer la portée du Premier théorème de Fubini, il faut se souvenir que, par définition, la famille complexe $(u_{k,p})_{(k,p)\in A}$ est sommable si, et seulement si, la famille de réels positifs $(a_{k,p})_{(k,p)\in A}$ est sommable.*

► Puisque la famille $(u_{k,p})_{(k,p)\in A}$ est sommable, on peut appliquer le résultat du paragraphe précédent. L'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{k,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right)$$

devient ici

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,p)\in I_n} x^n.$$

Puisque tous les termes de la somme sont égaux,

$$\sum_{(k,p)\in I_n} x^n = \#(D_n) \times x^n = d_n.x^n.$$

(Comme on l'a remarqué plus haut, l'application $(k,p) \mapsto k$ réalise une bijection de D_n sur l'ensemble des diviseurs positifs de n, donc le nombre de termes de la somme est égal au nombre de diviseurs de n.)