Séries numériques

1. La série $\sum(-1)^k/k^2$ est une série alternée et comme la suite de terme général $|(-1)^k/k^2| = {}^1/_{k^2}$ tend vers 0 en décroissant, on peut appliquer le Critère spécial des séries alternées.

D'après ce théorème, u_n est bien défini en tant que reste d'ordre $(n-1)$ d'une série convergente ; il est du signe du premier terme négligé : $(-1)^n/n^2$, c'est-à-dire du signe de $(-1)^n$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad |u_n| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

D'après le Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif, la série $\sum|u_n|$ est convergente, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

2. Soit $N \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}\cdot\mathbb{1}_{[1\leqslant n\leqslant k\leqslant N]}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}\cdot\mathbb{1}_{[1\leqslant n\leqslant k\leqslant N]}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\underbrace{\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^k}{k^2}}_{(\star)}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}\end{aligned}$$

puisque $(\star)$ est une somme de k termes tous égaux.

3. On doit remarquer que

$$\forall\, 1 \leqslant n \leqslant N, \quad u_n = \sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} + u_{N+1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= N u_{N+1} + \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}\right)\\ &= N u_{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}\end{aligned}$$

d'après la question précédente.

4. Comme $|u_n| \leqslant {}^1/_{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} N u_{N+1} = 0.$$

Par ailleurs, la série $\sum(-1)^k/k$ vérifie aussi les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées, donc elle est convergente.

Par passage à la limite dans la relation précédente, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

et on sait que cette dernière somme est égale à $-\ell n\, 2$.

Complément

5. Pour tout $(k,n) \in I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_{k,n} = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } 1 \leqslant k < n, \\ \frac{(-1)^k}{k^2} & \text{si } k \geqslant n \geqslant 1. \end{array} \right.$$

La famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est-elle sommable ?

✍ *Pour tout $(k,n) \in I$, on pose $a_{k,n} = |x_{k,n}|$. Par définition, la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(a_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable.*

*Comme les $a_{k,n}$ sont des **réels positifs**, le premier Théorème de Fubini va nous permettre de voir si cette famille est sommable.*

▶ *Considérons la partition*

$$I = \bigsqcup_{k\geqslant 1} I^k$$

où on a posé

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad I^k = \big\{(k,n),\ n \in \mathbb{N}^*\big\}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la sous-famille $(a_{k,n})_{(k,n)\in I^k}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_n a_{k,n}$ est convergente.

Or le terme général de cette série est nul à partir d'un certain rang (précisément pour tout $n > k$), donc la série est convergente. On pose alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_k = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{k,n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}.$$

Il est alors clair que la série $\sum \sigma_k$ est divergente (série harmonique), ce qui prouve que la famille $(a_{k,n})_{(k,n)\in I}$ n'est pas sommable et par conséquent que la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ n'est pas sommable.

▶ *On peut aussi considérer la partition*

$$I = \bigsqcup_{n\geqslant 1} I_n$$

où on a posé

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \big\{(k,n),\ k \in \mathbb{N}^*\big\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la sous-famille $(a_{k,n})_{(k,n)\in I_n}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_k a_{k,n}$ (de terme général positif) est convergente.

Comme il s'agit de la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ (privée des $(n-1)$ premiers termes), c'est bien une série convergente et on peut donc poser

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \tau_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

D'après le premier Théorème de Fubini, la famille $(a_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum \tau_n$ est convergente. Or (comparaison $\sum/\int$ classique)

$$\tau_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

donc la série $\sum \tau_n$ est divergente.

On a ainsi re-démontré que la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ n'était pas sommable, mais d'une manière qui demandait d'être un peu plus savant.

REMARQUE.— On a donc démontré que les deux sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} x_{k,n} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} x_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

étaient égales **bien que** la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ ne soit pas sommable !

▶ Le second Théorème de Fubini énonce donc une **condition suffisante** pour permuter deux signes $\sum$, mais il ne s'agit pas d'une condition nécessaire — alors que le premier Théorème de Fubini énonce une **condition nécessaire et suffisante** pour qu'une famille de **réels positifs** soit sommable.