Sous-espaces stables

On considère un endomorphisme f de E.

Q 1. *Qu'est-ce qu'un sous-espace stable ?*
R 1. Un sous-espace F est **stable par** f si, et seulement si,

$$\forall\, x \in F, \quad f(x) \in F,$$

c'est-à-dire

$$f_*(F) \subset F.$$

On doit comprendre l'endomorphisme f comme une *transformation* de l'espace E : si F est stable, alors la transformation de l'espace opère à l'intérieur de F.

Q 2. *Comment vérifier qu'un sous-espace est stable ?*
R 2. Deux cas particuliers et inintéressants : E et $\{0\}$ sont toujours stables, quel que soit l'endomorphisme étudié !
☙ Deux classes de sous-espaces stables à connaître : quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, les sous-espaces vectoriels

$$\operatorname{Im} P(f) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} P(f)$$

sont stables par f.
En particulier, les sous-espaces propres de f (pour $P = X-\lambda$) et les sous-espaces caractéristiques (pour $P = (X-\lambda)^{m_\lambda}$) sont stables par f.
☙ Si $f \circ g = g \circ f$, alors tout sous-espace propre de g est stable par f et plus généralement, tous les sous-espaces de la forme $\operatorname{Ker} P(g)$ et $\operatorname{Im} P(g)$ sont stables par f.
La connaissance des sous-espaces stables par f indique ainsi quels endomorphismes on peut espérer trouver dans le commutant de f.
Exercice : Soit p, un projecteur de E. Identifier les endomorphismes qui appartiennent au commutant de p. Quel est la dimension du commutant ? Quels sont les projecteurs qui commutent à p ?
Variante : Soit f, un endomorphisme diagonalisable de E dont les sous-espaces propres sont tous des droites vectorielles. Identifier les endomorphismes qui appartiennent au commutant de f. Quel est la dimension du commutant ? Quels sont les projecteurs qui commutent à f ?
Variante bis : Soit f, un endomorphisme diagonalisable de E. Identifier les endomorphismes qui appartiennent au commutant de f. Calculer la dimension du commutant en fonction des dimensions des sous-espaces propres de f.

❧ Si un sous-espace F n'entre pas dans une des catégories précédentes, il faut poser un calcul. Si on connaît une base $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ de F, il peut être intéressant de se rappeler que F est stable par f si, et seulement si,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad f(e_k) \in F.$$

Q 3. *Qu'est-ce qu'un sous-espace invariant ?*
R 3. Un sous-espace F est **invariant par** f lorsque

$$f_*(F) = F.$$

Q 4. *Comment vérifier qu'un sous-espace est invariant ?*
R 4. Le sous-espace $F = \operatorname{Vect}(e_k,\ k \in I)$ est invariant par f si, et seulement si, l'image de la famille génératrice

$$\big(f(e_k)\big)_{k \in I}$$

est une famille génératrice de F.
❧ Si $\lambda \neq 0$, le sous-espace $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$ est invariant par f (que λ soit effectivement une valeur propre de f ou pas).
❧ Si $\dim F$ est finie, le sous-espace F est invariant par f si, et seulement si, il est stable par f et si $\operatorname{Ker} f \cap F = \{0\}$.
Mais c'est faux en dimension infinie !

▶ **Contre-exemple :** Avec $E = \mathbb{K}[X]$ et l'unique endomorphisme $f \in L(E)$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left|\begin{array}{ll} f(X^{2k+1}) & = X^{2k+1} \\ f(X^{4k}) & = X^{2k} \\ f(X^{4k+2}) & = 0 \end{array}\right.$$

le sous-espace $\mathbb{K}[X^2]$ des polynômes pairs est invariant par f alors qu'il contient le noyau de f !

▶ **Contre-exemple :** Ce même sous-espace $\mathbb{K}[X^2]$ est stable par l'endomorphisme g caractérisé par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left|\begin{array}{ll} g(X^{2k}) & = X^{4k} \\ g(X^{4k+1}) & = X^{2k+1} \\ g(X^{4k+3}) & = X^{4k+2} \end{array}\right.$$

mais il n'est pas invariant par g bien que g soit un automorphisme de $\mathbb{K}[X^2]$!

Q 5. *Tout sous-espace stable est-il invariant ?*
R 5. Le noyau de f est stable par f sans être invariant (à moins que f ne soit injective).

Q 6. *Tout sous-espace invariant est-il fixe ?*
R 6. Si λ est une valeur propre différente de 0 et de 1, alors le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$ est invariant par f (car $\lambda \neq 0$) sans être fixe par f (car $\lambda \neq 1$).

Réduction

Q 7. *Quel est l'intérêt de trouver un sous-espace stable ?*
R 7. Si le sous-espace F est stable par $f \in L(E)$, alors l'endomorphisme $f_F \in L(F)$ induit par restriction de f est bien défini :

$$\forall x \in F, \quad f_F(x) = f(x).$$

Comme il opère sur un espace vectoriel plus petit :

$$\dim F < \dim E,$$

il est plus simple à étudier que f
☙ Le noyau de l'endomorphisme induit par restriction est facile à calculer :

$$\operatorname{Ker} f_F = \operatorname{Ker} f \cap F.$$

(On l'a déjà rencontré plus haut — mais où donc ?)
☙ L'image de f_F est contenue dans F.
☙ Le polynôme minimal de f_F est un diviseur du polynôme minimal de f, donc

$$\operatorname{Sp}(f_F) \subset \operatorname{Sp}(f)$$

et

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(f_F), \quad \operatorname{Ker}(f_F - \lambda \operatorname{Id}_F) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}) \cap F.$$

☙ Le polynôme caractéristique de f_F est un diviseur du polynôme caractéristique de f.

Q 8. *Un sous-espace propre est-il stable ?*
R 8. Oui. Mais un sous-espace stable n'est pas forcément un sous-espace propre : tout sous-espace est stable par $f = \operatorname{Id}$, alors que seul E est un sous-espace propre de Id.

Q 9. *Un sous-espace stable contient-il des vecteurs propres ?*
R 9. Un quart de tour (rotation d'angle $\pm\pi/2$) laisse deux sous-espaces stables : son axe (qui est le sous-espace propre associé à 1) et le plan orthogonal à cet axe (qui ne contient aucun vecteur propre).

Q 10. *Comment trouver une famille croissante de sous-espaces stables ?*
R 10. L'exemple le plus célèbre est

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} f^n \subset E,$$

particulièrement intéressante si f est un endomorphisme nilpotent.
☙ On ne peut alors échapper à une famille *décroissante* de sous-espaces stables :

$$E \supset \operatorname{Im} f \supset \operatorname{Im} f^2 \supset \cdots \supset \operatorname{Im} f^n \supset \{0\}.$$

Q 11. *Comment trouver une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables ?*
R 11. Le **Théorème de décomposition des noyaux** sert essentiellement à cela ! Si P est un polynôme annulateur de f dont on connaît une factorisation

$$P = P_1 \cdots P_r$$

en facteurs deux à deux premiers entre eux, alors

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u).$$

Aspects géométriques

Q 12. *Caractériser les droites stables.*
R 12. La droite $D = \mathbb{R} \cdot u_0$ est stable par f si, et seulement si, son vecteur directeur u_0 est un vecteur propre de f.

Q 13. *Caractériser les droites invariantes.*
R 13. La droite $D = \mathbb{R} \cdot u_0$ est invariante par f si, et seulement si, son vecteur directeur u_0 est un vecteur propre de f associé à une valeur propre non nulle.

Q 14. *Caractériser les droites fixes.*
R 14. La droite $D = \mathbb{R} \cdot u_0$ est fixe par f si, et seulement si, son vecteur directeur u_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
☙ Le plus grand sous-espace fixe est le sous-espace

$$E_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$$

(qui ne mérite d'être appelé sous-espace propre que si 1 est effectivement une valeur propre de f).
☙ Si $\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \geqslant 2$, alors il existe une infinité de droites fixes par f : chaque valeur propre de f associé à 1 engendre une droite fixe.
Il est alors plus pertinent de s'intéresser au sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ qu'aux droites fixes.

Q 15. *Caractériser les hyperplans stables.*
R 15. On considère une base $\mathscr{B}$ et la matrice

$$A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

qui représente f dans cette base.
L'hyperplan

$$H = [a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0] = [{}^t U_0 X = 0]$$

est stable par f si, et seulement si, la colonne

$$U_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de ${}^tA$:

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad {}^tA.U_0 = \alpha \cdot U_0.$$

NB : Une implication est facile à vérifier. Pour justifier l'implication réciproque, il faut se rappeler que deux formes linéaires sur E ont même noyau si, et seulement si, elles sont proportionnelles (avec un facteur de proportionnalité non nul).

Q 16. *Que dire d'un plan stable ?*

R 16. Si un plan est contenu dans un sous-espace propre, alors il est stable. Plus précisément, si le plan F est contenu dans le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$, alors l'endomorphisme de F induit par restriction de f est simplement l'homothétie de rapport λ.

Si u et v sont deux vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres λ et μ (distinctes), alors les droites

$$D_1 = \mathbb{R} \cdot u \quad \text{et} \quad D_2 = \mathbb{R} \cdot v$$

sont stables par f. Étant dirigées par des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, ces deux droites ne sont pas colinéaires et par conséquent le plan

$$F = D_1 \oplus D_2 = \operatorname{Vect}(u, v)$$

est stable par f (en tant que somme de sous-espaces stables par f).

Attention, dans le plan F, les seuls vecteurs propres de f sont les vecteurs non nuls des droites D_1 et D_2 ! En effet, si

$$x = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$$

est un vecteur propre de f, alors il existe $\theta \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(x) = \theta \cdot x$$

et par linéarité de f

$$\lambda\alpha \cdot u + \mu\beta \cdot v = \theta\alpha \cdot u + \theta\beta \cdot v.$$

Comme (u, v) est une famille libre, on en déduit que

$$(\lambda - \theta)\alpha = 0 \quad \text{et} \quad (\mu - \theta)\beta = 0.$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que

$$\left| \begin{array}{lllll} \theta & = \lambda & \text{et} \quad \beta = 0, & \text{donc} & x \in D_1, \\ \theta & = \mu & \text{et} \quad \alpha = 0, & \text{donc} & x \in D_2. \end{array} \right.$$

❧ Mais un plan stable par f peut très bien ne contenir aucun vecteur propre de f !
C'est le cas du plan stable par une rotation d'angle $\theta \in]0, \pi[$ (les seuls vecteurs propres d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ sont les vecteurs non nuls qui constituent l'axe de la rotation).
Plus généralement, si $P = X^2 + bX + c$ est un facteur irréductible du polynôme minimal de f, alors l'endomorphisme $P(f)$ n'est pas injectif et, quel que soit le vecteur non nul

$$x_0 \in \operatorname{Ker} P(f),$$

le sous-espace

$$F = \operatorname{Vect}(x_0,\ f(x_0))$$

est un plan stable par f.
– Il est évident que $f(x_0) \in F$.
– Comme $x_0 \in \operatorname{Ker}(f^2 + bf + c\,\mathrm{Id})$, on a aussi

$$f[f(x_0)] = -c \cdot x_0 - b \cdot f(x_0) \in F$$

donc le sous-espace F est stable par f.
– Pour tout $x \in F$, il existe deux scalaires α et β tels que

$$x = \alpha \cdot x_0 + \beta \cdot f(x_0)$$

et donc

$$\begin{aligned} f^2(x) &+ b \cdot f(x) + c \cdot x \\ &= \alpha \cdot [f^2(x_0) + b \cdot f(x_0) + c \cdot x_0] \\ &\quad + \beta \cdot f\big(f^2(x_0) + b \cdot f(x_0) + c \cdot x_0\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, P est un polynôme annulateur unitaire de f_F.
– Si $x_0 \neq 0$ et $f(x_0)$ étaient proportionnels, alors x_0 serait un vecteur propre de f_F et la valeur propre associée serait une racine réelle de P (= un polynôme annulateur de f_F) : c'est impossible. Donc $\dim F = 2$ et comme f_F n'est pas une homothétie (son spectre est vide !), P est en fait le polynôme minimal de f_F.

Traduction matricielle

Q 17. *Interpréter matriciellement l'existence d'un sous-espace stable.*
R 17. Si F est un sous-espace stable par f, alors on peut choisir une base $\mathscr{B}_F$ de F puis la compléter pour obtenir une base $\mathscr{B}$ de E. Dans une telle base, la matrice de f est triangulaire par blocs :

$$A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} B_1 & C \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

où

$$B_1 = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f_F).$$

La réciproque est vraie.
Exercice : On suppose que la matrice de f relative à la base

$$\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Identifier un plan stable par f.

Q 18. *On suppose qu'il existe une décomposition de* E *en somme directe de sous-espaces stables. Interpréter matriciellement.*
R 18. En considérant une base adaptée à la décomposition en somme directe

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} F_k$$

(c'est-à-dire une base constituée par concaténation de bases des différents sous-espaces stables F_k), la matrice de f est diagonale par blocs.
Bien entendu, le k-ième bloc diagonal représente alors l'endomorphisme f_k induit par restriction de f au sous-espace stable F_k.