Intégrales

1. Pour tout $x > 0$, la fonction φ_x définie par

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \varphi_x(t) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$$

est **continue** sur le **segment** $[0,1]$, donc l'intégrale $f(x)$ est bien définie.

2. Soient $x \geqslant 1$ (puisqu'on fait ici tendre x vers $+\infty$) et $t \in [0,1]$. On remarque tout d'abord que

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} = \frac{1}{x} \cdot \Big(1 + \frac{t^2}{x^2}\Big)^{-1} \leqslant \frac{1}{x}$$

et comme

$$\forall\, 0 \leqslant a \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant (1+a)(1-a) \leqslant 1$$

alors

$$\forall\, 0 \leqslant a \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant 1 - a \leqslant \frac{1}{1+a}$$

et donc (avec $a = {}^t\!/_x \in [0,1]$)

$$\frac{1}{x} \cdot \Big(1 - \frac{t^2}{x^2}\Big) \leqslant \frac{1}{x} \cdot \Big(1 + \frac{t^2}{x^2}\Big)^{-1}.$$

On a donc

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad \frac{1}{x} \cdot \Big(1 - \frac{t^2}{x^2}\Big) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leqslant \varphi_x(t) \leqslant \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

En intégrant cet encadrement pour $t \in [0,1]$, on en déduit que

$$\frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{x^3} \int_0^1 \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1+t^2}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

et donc, pour tout $x \geqslant 1$,

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \right| \leqslant \frac{K}{x^3}$$

avec

$$K = \int_0^1 \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

(intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0,1]$, donc bien définie, et qu'il est inutile de calculer).

On en déduit en particulier que

$$f(x) - \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \underset{x \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

3. On procède un peu différemment (on aurait pu utiliser la méthode qui suit pour étudier l'ordre de grandeur de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$) :

$$f(x) - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\Big) \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{-t^2}{\sqrt{1+t^2}(1+\sqrt{1+t^2})}$$

et par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left| \Big(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\Big) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \right| \leqslant \frac{t}{\sqrt{x^2+t^2}} \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}(1+\sqrt{1+t^2})} \leqslant 1.$$

En intégrant sur $[0,1]$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \qquad \left| f(x) - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} \right| \leqslant 1$$

et on a donc bien
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} + \mathcal{O}(1).$$

► Le changement de variable affine $u = {}^t\!/\!_x$ nous donne
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \int_0^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$
et on "reconnaît" ici la dérivée de la fonction Arg sh :
$$\int_0^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \left[\ln(u+\sqrt{u^2+1})\right]_0^{1/x}.$$
Mais lorsque x tend vers 0,
$$\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) = \ln\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}+o(x)\right) = -\ln x + \ln 2 + \mathcal{O}(x^2)$$
et donc
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} \sim -\ln x.$$
Comme $-\ln x$ est un infiniment grand, on en déduit que
$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x.$$