# Intégrales

On considère l'intervalle $I = ]0, +\infty[$.
Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, t \in I, \qquad u_k(t) = te^{-kt}.$$

❧ Pour tout $k \geqslant 1$, la fonction $u_k$ est continue sur l'intervalle ouvert $I$.

Elle tend vers $0$ (= une limite finie) au voisinage de $0$, donc elle est intégrable au voisinage de $0$.

Lorsque $t$ tend vers $+\infty$,

$$u_0(t) = te^{-t/2} \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$$

et

$$\forall\, k \geqslant 2, \quad u_k(t) = te^{-(k-1)t} \cdot e^{-t} = o(e^{-t})$$

donc $u_k$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi chaque fonction $u_k$ est intégrable sur $I$.

❧ La série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur $I$ en tant que série géométrique de raison $0 < e^{-t} < 1$ (puisque $t > 0$) et

$$\forall\, t > 0, \qquad S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) = t \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-kt})^k = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{t}{e^t - 1}.$$

❧ On voit sur l'expression précédente que la somme $S$ est continue sur $I$.

❧ Enfin, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\int_I \left|u_k(t)\right| dt = \int_0^{+\infty} te^{-kt}\, dt = \frac{1}{k^2}$$

(par intégration par parties, bien sûr).

► Comme la série $\sum {}^1\!/_{k^2}$ est convergente, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme : la somme $S$ est donc intégrable sur $I$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

✍ *Et si on avait choisi $I = [0, +\infty[$ ?*

❧ *L'étude de l'intégrabilité était simplifiée : chaque fonction $u_k$ étant continue sur $[0, +\infty[$, il suffisait de l'étudier au voisinage de $+\infty$ pour justifier son intégrabilité.*

❧ *La convergence simple était un peu plus délicate ! Pour $t = 0$, on n'a plus une série géométrique convergente (la raison est égale à $1$), mais une série de terme général nul (à cause du facteur $t$).*

❧ *La régularité de la somme était plus délicate aussi ! Un développement limité montre que $S(t)$ tend vers $1$ au voisinage droit de $0$ alors que $S(0) = 0$ (somme de la série de terme général nul). Par conséquent, $S$ est continue sur $]0, +\infty[$ et admet une limite à droite finie en $0$, donc $S$ est bien continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ (sans être continue sur cet intervalle).*