Intégrales

On considère l'intervalle $I =]0, +\infty[$.
Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, t \in I, \qquad u_k(t) = (-1)^k e^{-kt} = (-e^{-t})^k.$$

❧ Pour tout $k \geqslant 1$, la fonction u_k est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$u_k(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-t})$$

donc u_k est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc sur I.

❧ Pour tout $t \in I$, la série $\sum u_k(t)$ est une série géométrique de raison $(-e^{-t})$ et comme $0 < |-e^{-t}| = e^{-t} < 1$, cette série est (absolument) convergente. Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur I.

❧ La somme S définie par

$$\forall\, t \in I, \qquad S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) = (-e^{-t}) \cdot \frac{1}{1-(-e^{-t})} = \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}$$

est clairement continue sur I.

✍ ***MAIS** la série de terme général*

$$\int_I |u_k(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-kt}\, dt = \frac{1}{k}$$

est divergente *: on ne peut donc pas appliquer le Théorème d'intégration terme à terme.*

❧ Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in I$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right| = \left|\frac{-e^{-t}\big(1-(-e^{-t})^n\big)}{1+e^{-t}}\right|$$
$$= \frac{1-(-e^{-t})^n}{e^t+1}$$
$$\leqslant \frac{2}{1+e^t} = g(t)$$

puisque $|-e^{-t}| = e^{-t} \leqslant 1$.

On a trouvé un majorant $g(t)$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, la fonction g est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et $g(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$ lorsque t tend vers $+\infty$, donc cette fonction g est bien intégrable sur $I =]0, +\infty[$.

► D'après le Théorème de convergence dominée, la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\, dt$$

est convergente et tend vers

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt.$$

Autrement dit, la série

$$\sum \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\, dt$$

est convergente et sa somme est connue :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt.$$

On reconnaît une expression de la forme $u'(t)/u(t)$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt &= \lim_{A\to+\infty} \ln(1+e^{-A}) - \ln(1+e^{-0})\\ &= -\ln 2 = \ln\frac{1}{2}.\end{aligned}$$