# Intégrales

✍ *On va constater sur cet exemple qu'on n'a pas toujours besoin du cours sur les intégrales à paramètre (ch.9) pour étudier les propriétés d'une fonction définie par une intégrale.*

On pose $I = [0, +\infty[$, $\Omega = ]0, +\infty[$ et

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{x+t}.$$

**1.** Pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

est continue sur l'intervalle fermé $I$ et

$$f(x,t) = \frac{1}{x+t} \cdot e^{-xt} \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-xt}).$$

Comme $x > 0$, la fonction $[t \mapsto e^{-xt}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $I$ pour tout $x \in \Omega$.

Par conséquent, la fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$$

est bien définie pour tout $x \in \Omega$.

**2.** Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto e^{-xt}]$ est décroissante et positive, tandis que la fonction $[x \mapsto x+t]$ est croissante et positive. Par conséquent, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est décroissante et positive.

On a donc

$$\forall\, 0 < x < y,\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant f(y,t) \leqslant f(x,t)$$

et en intégrant cet encadrement, on obtient

$$\forall\, 0 < x < y, \quad 0 \leqslant F(y) \leqslant F(x)$$

ce qui signifie que la fonction $F$ est décroissante et positive sur $\Omega$.

**3.** Soit $x > 0$. Il est clair que

$$\forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \frac{e^{-xt}}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot xe^{-xt}$$

et par conséquent

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \cdot \int_0^{+\infty} xe^{-xt}\,dt = \frac{1}{x^2}.$$

✍ *Il est important de connaître par cœur la valeur de cette dernière intégrale !*

Cet encadrement nous dit en particulier que

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et donc que $F$ tend vers $0$ au voisinage de $+\infty$.

✍ *On aurait aussi pu appliquer le théorème* ***[Ch.9 - 17.1]****.*

**4.** Pour $x > 0$ fixé, on considère le changement de variable affine :
$$u = x(x+t) = x^2 + xt \qquad du = x\,dt.$$
On en déduit que
$$F(x) = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{xe^{-(u-x^2)}}{u} \cdot \frac{du}{x} = e^{x^2} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

**5.** Comme la fonction $[u \mapsto e^{-u}/u]$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$, on sait que la fonction $\varphi$ définie par
$$\forall\, y > 0, \qquad \varphi(y) = \int_y^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$
est une primitive de $-e^{-y}/y$.

Par conséquent,
$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = e^{x^2}\varphi(x^2)$$
donc $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et
$$\begin{aligned}\forall\, x > 0, \quad F'(x) &= 2xF(x) + 2xe^{x^2}\varphi'(x^2)\\ &= 2xF(x) + 2xe^{x^2} \cdot \frac{(-e^{-x^2})}{x^2}\\ &= 2xF(x) - \frac{2}{x}.\end{aligned}$$
La fonction $F$ est donc bien une solution de l'équation différentielle
$$\forall\, x > 0, \quad xy(x) - y'(x) = \frac{2}{x}.$$

✍ *On aurait aussi pu appliquer le théorème* ***[Ch.9 - 23]*** *pour démontrer que $F$ était de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer sa dérivée.*

**6.** On fixe $x > 0$ et on considère les deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies par :
$$\forall\, t \in I, \qquad \begin{cases} u(t) &= \frac{-e^{-xt}}{x},\\ v(t) &= \frac{1}{x+t}.\end{cases}$$
Il est clair que
$$\forall\, t \in I, \qquad \begin{cases} u'(t) &= e^{-xt},\\ v'(t) &= \frac{-1}{(x+t)^2}.\end{cases}$$
On a déjà démontré que $u'v$ était intégrable sur $I$. Il est clair que $uv$ tend vers $0$ au voisinage de $+\infty$. Enfin $uv'$ est continue sur $I$ et $\mathcal{O}(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$, donc $uv'$ est aussi intégrable sur $I$.

D'après la formule d'intégration par parties,
$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -u(0)v(0) - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt\\ &= \frac{1}{x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x(x+t)^2}\,dt.\end{aligned}$$
Pour tout $t \in I$ et tout $x > 0$, il est clair que
$$0 \leqslant \frac{e^{-xt}}{x(x+t)^2} \leqslant \frac{xe^{-xt}}{x^4}$$
et donc, en intégrant cet encadrement,
$$\forall\, x > 0, \qquad \left|F(x) - \frac{1}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^4}.$$

En particulier, lorsque $x$ tend vers $+\infty$,

$$F(x) = \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) \sim \frac{1}{x^2}.$$

**7.** La fonction $[u \mapsto 1/u]$ est continue et positive sur $]0,1]$, mais elle n'est pas intégrable au voisinage de $0$. Or

$$\frac{e^{-u}}{u} \underset{u \to 0}{\sim} \frac{1}{u}$$

donc

$$\int_y^1 \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{y \to 0}{\sim} \int_y^1 \frac{du}{u} = -\ln y.$$

Par composition de limites *(et pas par composition d'équivalents !)*, on en déduit que

$$\int_{x^2}^1 \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{x \to 0}{-} \ln(x^2) = -2\ln x.$$

D'autre part, l'intégrale

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

est convergente (déjà vu !) et indépendante de $x$ et le facteur $e^{x^2}$ tend vers $1$ lorsque $x$ tend vers $0$.

Finalement,

$$F(x) \underset{x \to 0}{=} e^{x^2}\left[\left(-2\ln x + o(\ln x)\right) + K\right] \sim -2\ln x.$$