Intégrales à paramètre

On pose ici $\Omega = [0, 1]$ (défini par l'énoncé!) et $I =]0, \pi]$ (ouvert en 0 pour des raisons qu'on verra en temps voulu). On considère la fonction f définie par

$$f(x, t) = \frac{t \sin t}{1 - x \cos t}.$$

1. Pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto f(x, t)]$$

est continue sur l'intervalle semi-ouvert I et même sur le segment $[0, \pi]$ pour $x > 0$. Pour $x = 1$, $f(1, 0)$ n'est pas défini (division par zéro!) mais lorsque t tend vers 0,

$$f(1, t) = \frac{t \sin t}{1 - \cos t} \sim \frac{t^2}{t^2/2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2.$$

Puisque la fonction $[t \mapsto f(1, t)]$ tend vers une limite finie au voisinage de 0, elle est intégrable au voisinage de 0 et donc sur I .

La fonction F est donc définie sur le segment Ω .

2. Pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x, t)]$$

est continue sur Ω . (Comme l'intervalle I est ouvert en 0, le $\cos t$ est toujours strictement inférieur à 1 et le dénominateur ne s'annule jamais.)

3. Pour justifier la continuité de F , il reste à établir la propriété de domination et pour majorer $|f(x, t)|$, on va étudier précisément le **sens de variation en fonction de x** .

► Pour $t \in]0, \pi/2]$, on a $\cos t \geq 0$, donc la fonction

$$[x \mapsto f(x, t)]$$

est croissante et donc

$$\forall 0 < t \leq \frac{\pi}{2}, \forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq f(x, t) \leq f(1, t).$$

► Pour $t \in]\pi/2, \pi]$, on a $\cos t \leq 0$, donc la fonction

$$[x \mapsto f(x, t)]$$

est décroissante et donc

$$\forall \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi, \forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq f(x, t) \leq f(0, t).$$

► Comme $f(x, t) \geq 0$ quels que soient x et t , on déduit des deux encadrements précédents que

$$\forall 0 < t \leq \pi, \forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq f(x, t) \leq f(0, t) + f(1, t).$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en tant que somme de deux fonctions intégrables sur I : la propriété de domination est ainsi établie.

Par conséquent, la fonction F est bien continue sur le segment $\Omega = [0, 1]$.