Intégrales à paramètre

► L'énoncé impose de prendre $\Omega =]0, +\infty[$. Les bornes de l'intégrale sont 0 et $+\infty$ et, comme nous le verrons, rien ne s'oppose à ce que nous choissions $I =]0, +\infty[$.

On considère alors

$$\forall x \in \Omega, \forall t \in I, \quad f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

► Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$ (alias *Théorème de Leibniz*) en vérifiant les trois conditions d'application.

• **Régularité.** Pour tout $t \in I$ fixé, la fonction

$$[x \mapsto f(x, t) = Ae^{-Bt}]$$

est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = A \cdot (-B)^n \cdot e^{-Bt}.$$

• **Intégrabilité.** Pour tout $x \in \Omega$ fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt} \right]$$

est continue sur I .

▮ *Par convention, la dérivée partielle $\partial^0 f / \partial x^0$ est en fait la fonction f elle-même.*

De plus, lorsque t tend vers $+\infty$, comme $x > 0$,

$$\frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt} = \frac{(-t)^n e^{-xt/2}}{1+t^2} \cdot e^{-xt/2} = o(e^{-xt/2})$$

donc les fonctions

$$\left[t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right]$$

sont bien toutes intégrables sur I .

▮ *Il s'agit ici de prouver qu'un produit est intégrable. La première écriture ne permet pas de conclure, puisqu'elle fait apparaître le produit d'une fonction intégrable (e^{-xt}) par une fonction qui n'est pas bornée. Une astuce classique sur l'exponentielle nous permet de réécrire cette expression comme le produit d'une fonction intégrable ($e^{-xt/2}$) par une fonction bornée (car de limite nulle) : on sait qu'un tel produit est intégrable.*

• **Domination.** Soient $a > 0$ et $\mathcal{V} = [a, +\infty[$. Comme les expressions

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| = \frac{t^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt}$$

sont visiblement des fonctions décroissantes de x , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in \mathcal{V} \times I, \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a, t) \right|.$$

Le majorant est visiblement indépendant de $x \in \mathcal{V}$. D'autre part, on a déjà démontré que ce majorant était intégrable sur I .

▮ *On rappelle la méthode pour établir la propriété de domination.*

– *On cherche d'abord un majorant indépendant du paramètre x . Pour cela, il est intéressant de connaître le sens de variation des expressions concernées en fonction de la variable x (s'il s'agit, comme ici, de fonctions monotones de x , alors il est facile de trouver un majorant. Ce majorant sera même le meilleur possible : ce sera la borne supérieure !*

– On cherche *ensuite* à vérifier si le majorant trouvé est bien intégrable sur I . S'il arrivait que ce ne soit pas le cas, il suffirait probablement de mieux choisir le sous-intervalle $\mathcal{V}$.

► D'après le Théorème de dérivation sous le signe $\int$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a > 0$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, +\infty[, \quad F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt} dt.$$

Par conséquent, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

$$\Omega = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt} dt.$$