Familles sommables [65]

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.

❧ Quels que soient les entiers n et q, on pose

$$I_n = \{(n,q),\ q \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad J_q = \{(n,q),\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Il est clair que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_q)_{q\in\mathbb{N}}$ sont deux partitions de $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

❧ Nous allons démontrer que la famille $(u_{n,q})_{(n,q)\in I}$ de terme général

$$u_{n,q} = a^{n(2q+1)}$$

est sommable en appliquant le (premier) théorème de Fubini à la famille $(v_{n,q})_{(n,q)\in I}$ de terme général *positif*

$$v_{n,q} = |u_{n,q}| = |a|^{n(2q+1)} = (|a|^{2q+1})^n.$$

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n v_{n,q}$ est absolument convergente en tant que série géométrique de raison $0 \leqslant |a|^{2q+1} < 1$, donc la famille $(v_{n,q})_{(n,q)\in J_q}$ est sommable et sa somme est égale à

$$V_q = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{n,q} = \frac{|a|^{2q+1}}{1-|a|^{2q+1}}.$$

Comme $|a| < 1$, alors

$$V_q \underset{q\to+\infty}{\sim} \frac{|a|^{2q+1}}{1} = |a| \cdot (|a|^2)^q$$

et comme la série géométrique de raison $0 \leqslant |a|^2 < 1$ est absolument convergente, la série $\sum V_q$ est absolument convergente.

D'après le théorème de Fubini, la famille $(u_{n,q})_{(n,q)\in I}$ est donc sommable.

❧ Nous pouvons donc calculer la somme de cette famille en appliquant de deux manières différentes le (second) théorème de Fubini.

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, la famille $(u_{n,q})_{(n,q)\in J_q}$ est sommable (en tant que sous-famille d'une famille sommable). Comme

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad u_{n,q} = (a^{2q+1})^n,$$

la somme de cette famille est égale à

$$s_q = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q} = \frac{a^{2q+1}}{1-a^{2q+1}}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, la famille $(u_{n,q})_{(n,q)\in I_n}$ est sommable (en tant que sous-famille d'une famille sommable). Comme

$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad u_{n,q} = a^n \cdot (a^{2n})^q,$$

la somme de cette famille est égale à

$$\sigma_n = \sum_{q=0}^{+\infty} u_{n,q} = a^n \cdot \frac{1}{1-a^{2n}}.$$

D'après le théorème de Fubini, les familles $(s_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ sont sommables et leurs sommes sont toutes les deux égales à la somme de la famille sommable $(u_{n,q})_{(n,q)\in I}$. Donc

$$\sum_{(n,q)\in I} u_{n,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{a^{2q+1}}{1-a^{2q+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1-a^{2n}}$$

et le changement d'indice $p = q+1$ montre que

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{a^{2q+1}}{1-a^{2q+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}.$$