Réduction des endomorphismes

1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Il est clair que l'application

$$C_P = \left[M \mapsto P^{-1}MP\right]$$

est une application de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même et que cette application est linéaire :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\qquad P^{-1}(\lambda M + N)P = \lambda \cdot P^{-1}MP + P^{-1}NP.$$

✍ *Si une propriété vous paraît évidente, dites-le — mais en montrant que vous avez bien compris de quelle propriété il s'agit !*

De plus, d'après l'Astuce taupinale (version multiplicative : $PP^{-1} = I_n$),

$$\forall\, M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad P^{-1}(MN)P = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP)$$

et enfin

$$P^{-1}I_nP = I_n$$

donc la conjugaison C_P est bien un (endo)morphisme d'algèbre.

Enfin, il est clair que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad P(P^{-1}MP)P^{-1} = M$$

donc C_p est une bijection de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dont l'application réciproque est

$$C_{P^{-1}} = \left[M \mapsto PMP^{-1}\right].$$

2. On suppose qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

► S'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$B^k = P^{-1}A^kP,$$

alors

$$B^{k+1} = B^k.B \overset{HR}{=} (P^{-1}A^kP).(P^{-1}AP) = P^{-1}A^{k+1}P.$$

On a donc démontré par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad P^{-1}A^kP = B^k \tag{$\star$}$$

et donc que les matrices A^k et B^k étaient semblables.

▷ Il est clair que ce résultat est encore vrai (et totalement inintéressant) pour $k = 0$: $A^0 = I_n$ et $B^0 = I_n$ sont semblables (c'est la *réflexivité* de la relation de similitude).

✍ *Le détail le plus important à retenir est clairement visible sur le calcul mais passé sous silence dans la conclusion : la même matrice de passage P convient pour tous les exposants k.*

► Si A est inversible, alors $AA^{-1} = I_n$ et donc

$$B.(P^{-1}A^{-1}P) = P^{-1}(AA^{-1})P = I_n$$

donc la matrice carrée B est inversible, d'inverse

$$B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

La matrice B^{-1} est donc semblable à la matrice A^{-1}.

✍ *À nouveau, on doit retenir que la même matrice de passage convient pour exprimer la similitude de A et B, ainsi que la similitude de A^{-1} et B^{-1}.*

▷ Par symétrie des hypothèses, l'implication que nous avons démontrée est en fait une équivalence !

✍ *Autant que possible, ne pas se fatiguer à faire deux fois la même chose !*

► Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d.$$

D'après ($\star$) et la remarque qui suit, puis par linéarité de C_P,

$$\begin{aligned} Q(B) &= \sum_{k=0}^{d} a_k (P^{-1}AP)^k \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k P^{-1} A^k P \\ &= P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right)P = P^{-1}.Q(A).P. \end{aligned}$$

Les matrices $Q(A)$ et $Q(B)$ sont donc semblables, quel que soit le polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$.

✍ *On voit ici combien est important le fait qu'il existe une matrice de passage* commune *pour exprimer la similitude des A^k et des B^k.*

❧ La seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle elle-même ! (puisque C_P est un <u>auto</u>morphisme d'algèbre).

Comme $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables, on en déduit que

$$Q(A) = 0 \iff Q(B).$$

Autrement dit, deux matrices semblables ont même idéal annulateur **[30]** et en particulier même polynôme minimal **[125]**.