Familles sommables [59]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = v_n = \frac{1}{3^n}.$$

Le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \frac{n+1}{3^n}.$$

Comme la série géométrique de raison $0 < 1/3 < 1$ est absolument convergente, la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{9}{4}.$$

❧ Cette fois, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n = q^n.$$

Le produit de Cauchy est la série $\sum w_n$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (n+1)q^n.$$

Comme $0 < q < 1$, la série géométrique $\sum q^n$ est absolument convergente, donc la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Avec le changement d'indice $n = k+1$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)q^{k+1} \\ &= q\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)q^k\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Variante. On peut aussi poser

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = v_n = q^n$$

mais $u_0 = q^0 = 1$ et $v_0 = 0$. Dans ce cas,

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k v_{n-k} + u_n v_0 = nq^n$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} w_n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^n\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-q}\right)\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = \frac{q}{(1-q)^2}.\end{aligned}$$

❧ On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)q^n \quad \text{et} \quad v_n = q^n.$$

Dans ce cas, le produit de Cauchy a pour terme général

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)q^k q^{n-k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right) q^n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\, q^n. \end{aligned}$$

Comme la série géométrique $\sum q^n$ est absolument convergente ($0 < q < 1$) et que la série $\sum u_n$ est absolument convergente (on l'a démontré ci-dessus, grâce au Théorème de Cauchy), la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \frac{1}{(1-q)^2} \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)q^n = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

❧ On remarque que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n^2 = (n+1)(n+2) - 3n - 2$$

(astuce attribuée à Newton *himself* dans le folklore). Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum n^2 q^n$ est convergente et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} &(n+1)(n+2)q^n \\ &- 3\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} q^n. \end{aligned}$$

Après quelques simplifications, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}.$$

❧ Avec le changement d'indice $k = n - 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2)\,(1/2)^k.$$

En appliquant la formule trouvée plus haut (possible, car $0 < 1/2 < 1$), on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = \frac{2}{(1-1/2)^3} = 16.$$