Familles sommables [60]

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$u_{p,q} = \frac{a^p b^q}{(p+q)!}.$$

❧ On note $\alpha = \max\{|a|,\ |b|\}$ et on remarque que

$$\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{p,q}| \leqslant \frac{\alpha^{p+q}}{(p+q)!}.$$

Nous allons démontrer que la famille de *réels positifs*

$$(v_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} = \left(\frac{\alpha^{p+q}}{(p+q)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable. À cet effet, il est naturel de considérer la partition

$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{s\in\mathbb{N}} I_s$$

où les couples (p,q) sont regroupés selon la somme de leurs éléments :

$$I_s = \big\{(p,q) \in \mathbb{N}^2\ :\ p+q = s\big\}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, l'ensemble d'indices I_s est *fini*, donc les sommes partielles

$$\sigma_s = \sum_{(p,q)\in I_s} v_{p,q}$$

sont bien définies. On constate sans peine que

$$\sigma_s = (s+1) \cdot \frac{\alpha^s}{s!} > 0$$

et on en déduit que

$$\frac{\sigma_{s+1}}{\sigma_s} = \frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{s!}{(s+1)!} \cdot \alpha \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0.$$

Comme la limite est strictement inférieure à 1, la règle de D'Alembert nous assure que la série $\sum \sigma_s$ est absolument convergente.

D'après le Premier théorème de Fubini, la famille $(v_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable.

D'après le Théorème de comparaison, la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est aussi une famille sommable.

❧ Nous pouvons donc appliquer le Second théorème de Fubini pour calculer la somme de cette famille, en réutilisant la partition définie plus haut.

❧ Commençons par supposer que $a = b$, de telle sorte que

$$\forall\, s \in \mathbb{N},\ \forall\,(p,q) \in I_s, \quad u_{p,q} = \frac{a^s}{s!}.$$

On en déduit que

$$\forall\, s \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{(p,q)\in I_s} u_{p,q} = \frac{(s+1)a^s}{s!}$$

et que

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} &= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(s+1)a^s}{s!} \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} s\cdot\frac{a^s}{s!} + \sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a^s}{s!} \\ &= a\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{a^{s-1}}{(s-1)!} + \sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a^s}{s!} \\ &= (a+1)e^a.\end{aligned}$$

❧ Pour $a \neq b$, la formule de la somme géométrique donne

$$\sum_{(p,q)\in I_s} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{s}\frac{a^p b^{s-p}}{s!} = \frac{1}{s!}\left(\frac{b^{s+1}-a^{s+1}}{b-a}\right)$$

pour tout $s \in \mathbb{N}$ et le Second théorème de Fubini nous dit que

$$\begin{aligned}\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} &= \sum_{s=0}^{+\infty}\left(\sum_{(n,p)\in I_s} u_{n,p}\right) \\ &= \frac{b}{b-a}\cdot\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{b^s}{s!} - \frac{a}{b-a}\cdot\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a^s}{s!} \\ &= \frac{be^b - ae^a}{b-a}.\end{aligned}$$