Lycée Pierre CORNEILLE **MP**
ANNÉE SCOLAIRE 2019/2020

Composition de Mathématiques

Le 25 septembre 2018 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique : la base canonique est une base orthonormée.

On rappelle les conventions typographiques usuelles : $\mathbf{AM}$ en lettres grasses désigne le vecteur d'origine A et d'extrémité M, tandis que AM en lettres maigres désigne la distance du point A au point M. Ainsi,

$$\mathbf{AM} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad AM = \|\mathbf{AM}\| \in \mathbb{R}_+$$

mais aussi $\mathbf{MA} = -\mathbf{AM}$ tandis que $MA = AM$.

On considère les trois points

$$O = (0,0), \qquad A = (6,0), \qquad B = (2,4)$$

et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, M \in \mathbb{R}^2, \quad f(M) = 2 \cdot OM^2 + AM^2 + 3 \cdot BM^2.$$

On note I, le barycentre du système pondéré

$$\big((O,2),(A,1)\big)$$

et G, le barycentre du système pondéré

$$\big((O,2),(A,1),(B,3)\big).$$

1. Justifier l'existence des barycentres I et G.
2. Exprimer le vecteur $\mathbf{OI}$ en fonction du vecteur $\mathbf{OA}$, puis le vecteur $\mathbf{OG}$ en fonction des vecteurs $\mathbf{OI}$ et $\mathbf{OB}$.
3. Calculer $f(O)$ et $f(G)$.
4. À l'aide de la relation de Chasles, exprimer $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et de la distance GM.
5. La fonction f atteint-elle un minimum ? un maximum ? En quels points du plan ?
6. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(M) = 96$.

❖ II – Problème ❖

On note E, l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Cet espace est normé par la norme de la convergence uniforme, définie par

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On ne demande pas de vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

Pour un endomorphisme u de E, on note aussi

$$|||u||| = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|u(f)\|_\infty$$

lorsque cette borne supérieure existe dans $\mathbb{R}$.

Partie A.

1. On définit une application

$$K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

en posant

$$K(x,t) = \left| \begin{array}{ll} t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1, \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1. \end{array} \right.$$

1. a. Vérifier que K est bien définie.
1. b. Vérifier que K est symétrique :

$$\forall\, u, v \in [0,1], \quad K(u,v) = K(v,u).$$

1. c. Soit $0 < x_0 < 1$. Tracer le graphe de la fonction

$$[t \mapsto K(x_0,t)]$$

et calculer l'intégrale

$$\int_0^1 K(x_0,t)\,dt.$$

2. Tracer le graphe de la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\left[x \mapsto \frac{-x^2}{2} + x\right].$$

Préciser les tangentes aux points d'abscisses $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

Partie B.

Pour $f \in E$, on définit la fonction

$$\Phi(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

en posant

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \Phi(f)(x) = \int_x^1 f(t)\,dt.$$

3. Démontrer que Φ est un endomorphisme de E.
4. L'endomorphisme Φ est-il surjectif ? injectif ?
5. Soit $f \in E$. Démontrer que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \left|\Phi(f)(x)\right| \leqslant \|f\|_\infty.$$

La borne supérieure $|||\Phi|||$ est-elle définie ?
6. On considère la fonction constante

$$f_0 = [x \mapsto 1] \in E.$$

Calculer $\left\|\Phi(f_0)\right\|_\infty$. Que peut-on en déduire ?

Partie C.

Pour $f \in E$, on définit la fonction

$$V(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

en posant

$$\forall\, x \in [0,1], \quad V(f)(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t)\,dt.$$

7. Démontrer que, pour tout $f \in E$, la fonction $V(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$. Préciser sa valeur $V(f)(0)$, la valeur de sa dérivée $[V(f)]'(1)$ ainsi que sa dérivée seconde $[V(f)]''(x)$.
8. Démontrer que V est un endomorphisme de E.
9. L'endomorphisme V est-il injectif ?
10. a. Pourquoi l'endomorphisme V n'est-il pas surjectif ?
10. b. Caractériser les fonctions qui appartiennent à $\operatorname{Im} V$.
10. c. Expliciter une application linéaire

$$W : \operatorname{Im} V \to E$$

telle que $W \circ V = I_E$.
11. Démontrer que V est lipschitzienne et que

$$|||V||| = \frac{1}{2}.$$

☞ *On pourra calculer $V(f_0)$ (où f_0 a été définie au **6.**).*

12. Démontrer que, pour tout $f \in E$, la fonction $V(f)$ est $\|f\|_\infty$-lipschitzienne sur $[0,1]$.

Partie D.

Pour tout $f \in E$, on pose

$$Q(f) = \int_0^1 \left[V(f)(t)\right]^2 dt.$$

13. Expliquer pourquoi Q est une application bien définie sur E.
14. Démontrer que $Q(f) \geqslant 0$ pour toute fonction $f \in E$. Étudier le cas d'égalité : pour quelles fonctions $f \in E$ a-t-on $Q(f) = 0$?
15. L'application Q est-elle une norme sur E ?
16. Soient $f \in E$ et $g_0 \in E$, fixées. On suppose que $Q(g_0) = 1$ et on considère l'application q définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad q(x) = Q(f + x g_0).$$

16. a. Vérifier que q est convexe.
16. b. Démontrer que $\inf_{x\in\mathbb{R}} q(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Quelle est sa valeur ?

❖ III – Problème ❖

Partie A.

Dans cette partie, l'espace $E = \mathbb{R}^d$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ (quelconque).

On **rappelle** qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers le vecteur $\ell \in E$ si, et seulement si,

$$\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On suppose donnée une application

$$T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

telle que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \left\|T(x) - T(y)\right\| \leqslant \alpha \|x - y\|$$

où α est une constante telle que $0 < \alpha < 1$.

On choisit un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = T(x_n).$$

On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$.
1. a. Démontrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \alpha^n \|x_1 - x_0\|.$$

1. b. En déduire que la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ est convergente.
2. **On admet** que cette dernière propriété prouve que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}^d$.
2. a. Démontrer que la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $T(\ell)$.
2. b. Démontrer que $T(\ell) = \ell$.
3. Combien de solutions l'équation

$$T(x) = x$$

a-t-elle ?

Partie B.

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle que

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k|.$$

On ne demande pas de vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

On considère une matrice

$$C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d} \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$$

et un vecteur $b \in \mathbb{R}^d$. En identifiant la matrice C à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ qui lui est canoniquement associé, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad T(x) = Cx + b.$$

4. L'application T est-elle linéaire ?
5. Justifier l'existence du réel α défini par

$$\alpha = \max_{1\leqslant i\leqslant d} \sum_{j=1}^d |c_{i,j}|.$$

Ce réel peut-il être nul ?

6. Démontrer que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \left\|T(x) - T(y)\right\|_\infty \leqslant \alpha \left\|x - y\right\|_\infty.$$

7. Soient $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ et $b_0 \in \mathbb{R}^d$. On cherche à résoudre l'équation $Ax = b_0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^d$.

On pose $C = I_d - \lambda A$, où λ est un réel strictement positif. Comment choisir $b \in \mathbb{R}^d$ pour que

$$Ax = b_0 \iff T(x) = x?$$

8. On choisit de résoudre l'équation $Ax = b_0$ directement en appliquant l'algorithme du pivot. Indiquer (sans démonstration) la complexité de cette méthode en fonction de d.

9. On choisit de résoudre l'équation $Ax = b_0$ par approximations successives en résolvant $T(x) = x$ avec la méthode décrite dans la **partie A**.

9. a. Comment choisir λ pour que cette méthode puisse s'appliquer ?

Dans la suite de cette question, on supposera que cette condition sur λ est satisfaite.

9. b. Estimer la complexité de cette méthode en fonction de d et du nombre n d'itérations effectuées.

9. c. Dans quelle mesure cette méthode est-elle plus intéressante que l'algorithme du pivot ?

Partie C.

Dans cette dernière partie, on se place dans $\mathbb{R}^3$ et on étudie l'équation $Ax = b_0$ définie par

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Suivant l'étude de la **partie B**, on pose $C = I_3 - \lambda A$.

10. Comment choisir λ pour que $\alpha < 1$?

11. Le choix $\lambda = 1/4$ assure bien que $\alpha < 1$. À l'aide d'un raisonnement graphique, proposer un meilleur choix de λ.

12. Résoudre $Ax = b_0$ (par l'algorithme du pivot).

Solution I ❁ Fonction de Leibniz

1. Les poids totaux sont respectivement égaux à $2+1=3$ et $2+1+3=6$, donc non nuls. Cela suffit à justifier l'existence des deux barycentres.

2. Par définition du barycentre et relation de Chasles,

$$0 = 2\cdot \mathbf{IO} + 1\cdot \mathbf{IA} = 3\cdot \mathbf{IO} + \mathbf{OA}$$

donc $\mathbf{OI} = {}^1\!/_3 \cdot \mathbf{OA}$.

❧ De même,

$$0 = 2\cdot \mathbf{GO} + \mathbf{GA} + 3\cdot \mathbf{GB} = 6\cdot \mathbf{GO} + \mathbf{OA} + 3\cdot \mathbf{OB}$$

donc

$$\mathbf{OG} = \frac{1}{6}\cdot \mathbf{OA} + \frac{1}{2}\cdot \mathbf{OB} = \frac{1}{2}\cdot \mathbf{OI} + \frac{1}{2}\cdot \mathbf{OB}.$$

On remarque en particulier que $G = (2,2)$ est le milieu du segment $[B, I]$.

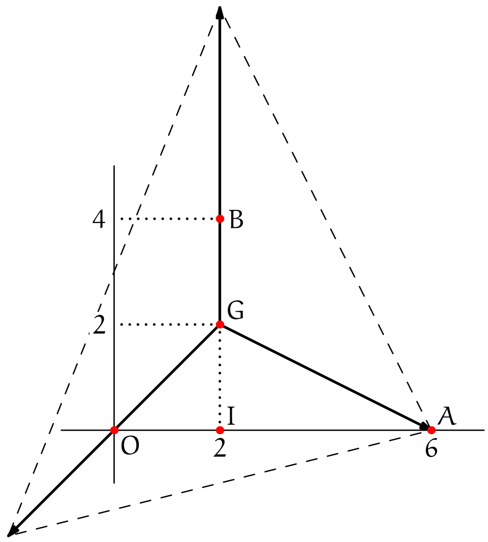


Illustration de la relation
$2\cdot \mathbf{GO} + 1\cdot \mathbf{GA} + 3\cdot \mathbf{GB} = 0$

3. D'après le théorème de Pythagore,

$$OA^2 = 6^2 = 36 \quad \text{et} \quad OB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

donc $f(O) = 2\cdot OO^2 + OA^2 + 3\cdot OB^2 = 96$.

❧ Comme $G = (2,2)$,

$$OG^2 = 2^2+2^2 = 8, \quad AG^2 = 4^2+2^2 = 20, \quad BG^2 = 2^2 = 4$$

donc $f(G) = 2\cdot OG^2 + AG^2 + 3\cdot BG^2 = 48$.

4. D'après la relation de Chasles,

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OG} + \mathbf{GM}$$

donc

$$OM^2 = \langle \mathbf{OM} \,|\, \mathbf{OM} \rangle = OG^2 + GM^2 + 2\langle \mathbf{OG} \,|\, \mathbf{GM} \rangle.$$

On obtient des expressions analogues pour AM^2 et BM^2. On en déduit que, pour tout $M \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(M) &= 2\cdot OM^2 + AM^2 + 3\cdot BM^2 \\ &= 2\cdot (OG^2 + GM^2) + (AG^2 + GM^2) \\ &\quad + 3\cdot (BG^2 + GM^2) \\ &\quad + 2\langle 2\cdot \mathbf{OG} + \mathbf{AG} + 3\cdot \mathbf{BG} \,|\, \mathbf{GM} \rangle \\ &= f(G) + 6GM^2 \end{aligned}$$

puisque, par définition de G comme barycentre,

$$2\cdot \mathbf{GO} + \mathbf{GA} + 3\cdot \mathbf{GB} = 0.$$

5. Dans l'expression de $f(M)$, le terme $f(G)$ est une constante, le terme $6GM^2$ est toujours positif et nul si, et seulement si, $M = G$. Par conséquent, la fonction f atteint un minimum pour $M = G$ (et seulement pour $M = G$).

Le terme $6GM^2$ peut être aussi grand qu'on le souhaite (puisque le plan $\mathbb{R}^2$ n'est pas borné), donc la fonction f n'est pas majorée : elle n'atteint donc pas de maximum.

6. Comme $f(G) = 48$, l'équation $f(M) = 96$ équivaut à $6GM^2 = 48$, soit $GM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. L'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(M) = 96$ est donc le cercle de centre G et de rayon $2\sqrt{2}$.

On a vu plus haut que $f(O) = 96$. L'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(M) = 96$ est donc aussi le cercle de centre G qui passe par l'origine.

Solution II ❁ Opérateur à noyau

Partie A.

1. a. Soit $(x,t) \in [0,1]\times[0,1]$. On distingue trois cas :
– si $t < x$, alors $K(x,t) = t$;
– si $x > t$, alors $K(x,t) = x$;
– si $x = t$, alors $K(x,t) = t = x$: il y a deux définitions possibles dans ce cas, mais ces deux définitions sont cohérentes.

Bref, la quantité $K(x,t)$ est bien définie pour tout couple $(x,t) \in [0,1]\times[0,1]$.

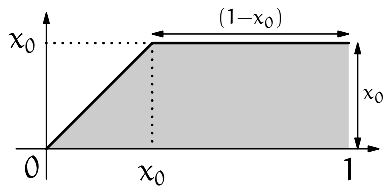
1. b. Soit $(u,v) \in [0,1]\times[0,1]$. On distingue deux cas :
– si $u \leqslant v$, alors $K(u,v) = u$ (pour $x = u$ et $t = v$) et comme $u \leqslant v$, alors $K(v,u) = u$ (pour $x = v$ et $t = u$) ;
– si $v < u$, alors $K(u,v) = v$ (pour $x = u$ et $t = v$) et $K(v,u) = v$ (pour $x = v$ et $t = u$).

Variante : On peut aussi remarquer que

$$\forall\,(x,t) \in [0,1]\times[0,1], \quad K(x,t) = \min\{x,t\}$$

expression dont la symétrie est évidente.

1. c. Par définition de K,
– pour $t \in [0, x_0]$, on a $K(x_0,t) = t$ (fonction linéaire) ;
– pour $t \in [x_0, 1]$, on a $K(x_0,t) = x_0$ (fonction constante).

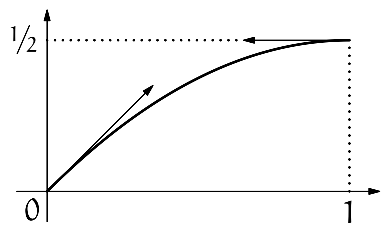


L'intégrale est donc l'aire d'un trapèze :

$$\int_0^1 K(x_0,t)\,dt = \frac{1+(1-x_0)}{2}\times x_0 = x_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

(On rappelle que l'aire d'un trapèze est le produit de la moyenne des bases par la hauteur.)

2. Il s'agit d'un trinôme du second degré dont la concavité est tournée vers le bas (le coefficient de x^2 est strictement négatif). La parabole atteint son sommet à l'abscisse $x = 1$ $(= {}^{-b}\!/_{2a})$. L'allure du graphe est donc parfaitement connue.



La tangente au point d'abscisse $x_1 = 1$ est donc horizontale (tangente au sommet de la parabole). Quant à la tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$, un développement limité à l'ordre 1 suffit :

$$\frac{-x^2}{2} + x \underset{x \to 0}{=} x + o(x).$$

La tangente à l'origine est donc la droite d'équation $y = x$.

Partie B.

3. Comme f est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, on peut appliquer le Théorème fondamental de l'Analyse : l'application

$$x \mapsto \Phi(f)(x) = \int_1^x -f(t)\,dt$$

est la primitive de $-f$ qui s'annule en $x = 1$. En particulier, il s'agit d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et donc d'une fonction continue. Cela prouve déjà que Φ est bien une application de E dans E.

La linéarité de Φ :

$$\forall\, x \in [0,1],\ \forall\, f, g \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\Phi(\lambda f + g)(x) = \lambda \Phi(f)(x) + \Phi(g)(x)$$

est une conséquence directe de la linéarité de l'intégration.

4. On a vu à la question précédente que $\Phi(f)$ était une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Comme E est l'ensemble des fonctions continues et que certaines fonctions continues ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$, l'endomorphisme Φ *n'est pas* surjectif.

❧ Soit $f \in \operatorname{Ker} \Phi$. Comme on l'a vu à la question précédente, la fonction $\Phi(f)$ est une primitive de $-f$. Si on suppose que $\Phi(f)$ est identiquement nulle, on en déduit que sa dérivée est elle aussi identiquement nulle. Ainsi $\operatorname{Ker} \Phi$ est réduit à la fonction nulle et l'endomorphisme Φ est injectif.

5. Soit $x \in [0, 1]$. La borne supérieure $\|f\|_\infty$ étant un majorant, on a

$$\forall\, t \in [x, 1], \quad |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_x^1 |f(t)|\,dt \leqslant \int_x^1 \|f\|_\infty\,dt = (1-x)\|f\|_\infty$$

et d'après l'inégalité de la Moyenne,

$$\left| \int_x^1 f(t)\,dt \right| \leqslant \int_x^1 |f(t)|\,dt.$$

Bref,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad |\Phi(f)(x)| \leqslant (1-x)\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

❧ Comme le majorant est indépendant de $x \in [0, 1]$, on peut passer au sup par rapport à x dans cet encadrement :

$$\forall\, f \in E, \quad \|\Phi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

Notons Σ, la sphère unité de E, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $\|f\|_\infty = 1$. On vient de prouver que

$$\forall\, f \in \Sigma, \quad \|\Phi(f)\|_\infty \leqslant 1$$

(soit : 1 est *un majorant*), ce qui prouve l'existence de la borne supérieure

$$|||\Phi||| = \sup_{f \in \Sigma} \|\Phi(f)\|_\infty$$

et aussi que

$$|||\Phi||| \leqslant 1$$

(*la borne supérieure est le plus petit des majorants*).

6. Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\Phi(f_0)(x) = 1 - x \geqslant 0$$

donc

$$\|\Phi(f_0)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} (1 - x) = 1.$$

Or $f_0 \in \Sigma$, donc (*la borne sup est un majorant*)

$$|||\Phi||| \geqslant \|\Phi(f_0)\|_\infty = 1.$$

D'après la question précédente,

$$|||\Phi||| = 1.$$

Partie C.

7. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} V(f)(x) &= \int_0^x K(x,t)f(t)\,dt + \int_x^1 K(x,t)f(t)\,dt \\ &= \int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Il est donc clair que

$$V(f)(0) = 0.$$

Comme au **[3.]**, on peut invoquer le Théorème fondamental pour établir que $V(f)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [0,1], \quad [V(f)]'(x) &= xf(x) + \Phi(f)(x) - xf(x) \\ &= \Phi(f)(x). \end{aligned}$$

Cela prouve que $[V(f)]'$ est de classe $\mathscr{C}^1$ d'après **[3.]** et donc que $V(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 1]$. On déduit encore de **[3.]** que

$$[V(f)]'(1) = 0$$

et que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad [V(f)]''(x) = -f(x).$$

8. On a établi à la question précédente que $V(f)$ était une fonction continue sur $[0, 1]$ pour tout $f \in E$. D'autre part, la linéarité de V est évidente (comme au **[3.]**).

9. Si $V(f)$ est identiquement nulle, alors sa dérivée seconde est identiquement nulle et donc **[7.]** la fonction f est identiquement nulle. L'endomorphisme V est donc injectif.

10. a. Pour tout $f \in E$, l'application $V(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ **[7.]** et il existe des fonctions continues qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^2$, donc l'endomorphisme V n'est pas surjectif.

10. b. D'après **[7.]**, toutes les fonctions g qui appartiennent à $\operatorname{Im} V$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifient

$$g(0) = g'(1) = 0.$$

Réciproquement, si g est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $g(0) = g'(1) = 0$, alors on pose $f = -g''$. Il est clair que $f \in E$ et [d'après **7.**] on a

$$\forall\, x \in [0,1], \quad [V(f)]''(x) = -f(x) = g''(x)$$

ce qui prouve que la différence $V(f) - g$ est une fonction *affine*. Or cette différence est nulle en $x = 0$ et la pente de cette fonction affine est nulle, donc $V(f) = g$, ce qui prouve que g appartient à l'image de V.

L'image de V est donc l'ensemble

$$\big\{g \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \;:\; g(0) = g'(1) = 0\big\}.$$

10. c. On a vu à la question précédente que $-g''$ est un antécédent de $g \in \operatorname{Im} V$. On sait **[9.]** que l'endomorphisme V est injectif, donc $-g''$ est l'unique antécédent de $g \in \operatorname{Im} V$ par V.

En posant

$$\forall\, g \in \operatorname{Im} V, \quad W(g) = -g''$$

on définit bien une application linéaire

$$W \;:\; \operatorname{Im} V \to E$$

telle que

$$\forall\, f \in E, \quad W\big(V(f)\big) = f$$

c'est-à-dire $W \circ V = I_E$.

11. On va suivre la méthode usuelle, rappellée au **[5.]** et au **[6.]**.

❧ Soient $f \in E$ et $x \in [0,1]$.

D'après l'inégalité triangulaire et l'inégalité de la Moyenne,

$$\begin{aligned}\big|V(f)(x)\big| &\leqslant \left|\int_0^x tf(t)\,dt\right| + \left|x\int_x^1 f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_0^x \big|tf(t)\big|\,dt + x\int_x^1 \big|f(t)\big|\,dt\end{aligned}$$

(puisque $0 \leqslant x$ et $x \leqslant 1$). Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\big|f(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty$$

(*la borne sup est un majorant*). On en déduit d'une part que

$$\forall\, t \in [0,x], \quad \big|tf(t)\big| \leqslant t\|f\|_\infty$$

(puisque $t \geqslant 0$) et d'autre part que

$$\forall\, t \in [x,1], \quad \big|f(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\big|V(f)(x)\big| \leqslant \left(\int_0^x t\,dt + x\int_x^1 dt\right)\|f\|_\infty = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\|f\|_\infty.$$

D'après **[2.]**,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big|V(f)(x)\big| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

Comme le majorant est indépendant de x, on peut passer au sup :

$$\forall\, f \in E, \quad \|V(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

On en déduit, comme au **[5.]**, que $|||V|||$ est bien définie et que

$$|||V||| \leqslant \frac{1}{2}.$$

❧ On a bien sûr $\|f_0\|_\infty = 1$ et donc

$$|||V||| \geqslant \|V(f_0)\|_\infty$$

(puisque *le sup est un majorant*). Mais la fonction $V(f)$ n'est autre que la fonction étudiée au **2.** (calculs effectués au **1.c.**). On en déduit que

$$\|V(f_0)\|_\infty = \frac{1}{2}$$

et donc que $|||V||| = 1/2$.

12. Soit $f \in E$. D'après **[7.]**, la fonction $V(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $[V(f)]' = \Phi(f)$. D'après **[5.]**,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big|[V(f)]'(x)\big| \leqslant \|f\|_\infty$$

et d'après l'Inégalité des accroissements finis, la fonction $V(f)$ est lipschitzienne et admet $\|f\|_\infty$ pour constante de Lipschitz.

Partie D.

13. D'après **[7.]**, la fonction $V(f)$ est *continue* sur le *segment* $[0,1]$. Il en va donc de même pour la fonction $[V(f)]^2$, ce qui prouve l'existence de l'intégrale. Ainsi, la fonction Q est bien définie sur E.

14. Soit $f \in E$. Alors

$$\forall\, t \in [0,1], \quad [V(f)(t)]^2 \geqslant 0$$

et $Q(f) \geqslant 0$ puisque l'intégration conserve les inégalités.

❧ Si f est la fonction nulle, il est clair que $Q(f) = 0$ (par linéarité de V).

Réciproquement, si $Q(f) = 0$, alors la fonction $[V(f)]^2$ est une fonction *continue* et *positive* sur $[0,1]$ dont l'intégrale est nulle : par conséquent, $V(f)$ est la fonction nulle. Or V est un endomorphisme injectif **[9.]**, donc f est la fonction nulle.

On a donc $Q(f) = 0$ si, et seulement si, f est la fonction nulle.

15. L'application Q n'est pas positivement homogène :

$$\forall\, f \neq 0_E, \quad Q(2f) = 4Q(f) \neq 2Q(f)$$

donc ce n'est pas une norme sur E.

16. a. Par linéarité de V et de l'intégrale,

$$q(x) = Q(f) + 2x\varphi(f, g_0) + Q(g_0)x^2$$

où
$$\varphi(f, g_0) = \int_0^1 V(f)(t)V(g_0)(t)\,dt.$$
Or $Q(g_0) = 1$ par hypothèse, donc q est une fonction polynomiale de degré 2 dont le coefficient dominant est strictement positif : c'est bien une fonction convexe.

16. b. On **sait** que la fonction polynomiale
$$[x \mapsto x^2 + 2bx + c]$$
atteint son minimum en $x_0 = -b$ et ce minimum est donc égal à $c - b^2$. Par conséquent, la fonction q admet une borne inférieure et
$$\inf_{x\in\mathbb{R}} q(x) = \min_{x\in\mathbb{R}} q(x) = Q(f) - \left(\int_0^1 V(f)(t)V(g_0)(t)\,dt\right)^2.$$

Solution III ❀ Résolution itérative d'un système linéaire

Partie A.

1. a. Supposons [HR] que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement
$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \alpha^n \|x_1 - x_0\|$$
soit établi.

Alors, comme T est α-lipschitzienne,
$$\begin{aligned}\|x_{n+2} - x_{n+1}\| &= \big\|T(x_{n+1}) - T(x_n)\big\| \\ &\leqslant \alpha\,\|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leqslant \alpha^{n+1}\,\|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$
la dernière inégalité découlant de l'hypothèse de récurrence. On a ainsi démontré que la propriété [HR] était héréditaire.

Comme par ailleurs la propriété [HR] est évidemment vérifiée pour $n = 0$, elle est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. b. Comme $0 < \alpha < 1$, la série géométrique $\sum \alpha^n$ est convergente.

D'après la question précédente,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \underbrace{\|x_1 - x_0\|}_{C^{te}}\,\alpha^n.$$
Le critère de comparaison pour les séries de terme général positif montre alors que la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ est convergente.

REMARQUE.— On a ainsi démontré la convergence absolue de la série télescopique $\sum(x_{n+1} - x_n)$. Comme E est un espace de dimension finie, cela prouve que cette série converge dans E et donc que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E.

2. a. Comme T est α-lipschitzienne,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \big\|T(x_n) - T(\ell)\big\| \leqslant \alpha\|x_n - \ell\|.$$
Or la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ℓ, donc la suite de terme général $\|x_n - \ell\|$ converge vers 0 et, par encadrement, la suite de terme général $\|T(x_n) - T(\ell)\|$ tend vers 0.

Par définition, cela signifie que la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $T(\ell) \in E$.

2. b. En tant que suite extraite d'une suite convergente de limite ℓ, la suite $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Or
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = T(x_n)$$
donc $T(\ell) = \ell$ par unicité de la limite.

3. On vient de démontrer que l'équation $T(x) = x$ admet au moins une solution $\ell \in E$.

Si cette équation admet deux solutions ℓ_1 et ℓ_2, alors
$$\|\ell_1 - \ell_2\| = \big\|T(\ell_1) - T(\ell_2)\big\| \leqslant \alpha\,\|\ell_1 - \ell_2\|$$
(puisque T est α-lipschitzienne). On en déduit que
$$\underbrace{(\alpha - 1)}_{<0}\ \underbrace{\|\ell_1 - \ell_2\|}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$
donc que $\|\ell_1 - \ell_2\| = 0$ et enfin que $\ell_1 = \ell_2$.

L'équation $T(x) = x$ admet donc exactement une solution dans E.

Partie B.

4. Il est clair que $T(0_E) = b$. Par conséquent, si $b \neq 0_E$, alors T n'est pas linéaire.

Réciproquement, si $b = 0_E$, alors $T = C$ est bien une application linéaire.

L'application T est donc linéaire si, et seulement si, $b = 0_E$.

5. Toute famille *finie* de nombres réels admet un plus grand élément, ce qui justifie l'existence de α.

❧ Le plus grand élément est un majorant. Par conséquent, si $\alpha = 0$, alors
$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \quad 0 \leqslant \sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}| \leqslant \alpha = 0.$$
Si une somme de termes positifs est nulle, alors chaque terme est nul. On en déduit que
$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant d, \quad c_{i,j} = 0$$
et donc que $C = 0$.

La réciproque étant évidente, on en déduit que $\alpha = 0$ si, et seulement si, la matrice C est la matrice nulle.

6. Par définition de T et linéarité de C,
$$T(x) - T(y) = C(x - y).$$
D'après la règle du calcul matriciel, la i-ième coordonnée du vecteur $C(x - y)$ est égale à
$$\sum_{j=1}^{d} c_{i,j}(x_j - y_j).$$
D'après l'inégalité triangulaire,
$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \quad \left|\sum_{j=1}^{d} c_{i,j}(x_j - y_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}|\,|x_j - y_j|.$$
Comme le max est un majorant,
$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant d, \quad |x_j - x_j| \leqslant \|x - y\|_\infty$$

et comme tous les $|c_{i,j}|$ sont positifs,

$$\sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}|\,|x_j - y_j| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}|\,\|x-y\|_\infty.$$

Comme le max est un majorant et que $\|x-y\|_\infty \geqslant 0$,

$$\sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}|\,\|x-y\|_\infty \leqslant \alpha\,\|x-y\|_\infty.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \quad \left|\sum_{j=1}^{d} c_{i,j}(x_j - y_j)\right| \leqslant \alpha\,\|x-y\|_\infty.$$

On a un majorant indépendant du paramètre i, on peut donc passer au sup :

$$\|T(x)-T(y)\|_\infty = \|C(x-y)\|_\infty \leqslant \alpha\,\|x-y\|_\infty$$

ce qu'il fallait démontrer.

7. Pour $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} Ax = b_0 &\iff \lambda Ax = \lambda b_0 \\ &\iff x = (x - \lambda Ax) + \lambda b_0 \\ &\iff x = (I_d - \lambda A)(x) + \lambda b_0. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $b = \lambda b_0$ pour que la résolution de $Ax = b_0$ se ramène à la résolution de $T(x) = x$.

8. On **sait** que la complexité de l'algorithme du pivot est $\mathcal{O}(d^3)$.

9. a. Pour que la méthode de la **partie A** puisse s'appliquer, il suffit de choisir $\lambda > 0$ de telle sorte que $\alpha < 1$.

Mais rien ne prouve qu'un tel choix soit toujours possible !

9. b. À chaque itération, on passe de x_k à x_{k+1} en appliquant T, c'est-à-dire en multipliant la colonne x_k par la matrice C et en ajoutant la colonne b. Les multiplications entre réels étant des opérations sensiblement plus coûteuses que les additions, c'est le nombre de multiplications qui va indiquer la complexité de l'opération.

Il faut calculer d coordonnées pour x_{k+1} et, pour chaque coordonnée, il faut effectuer d multiplications. Par conséquent, la complexité de chaque itération est en $\mathcal{O}(d^2)$ et la complexité de l'algorithme en $\mathcal{O}(nd^2)$ (puisqu'on effectue n itérations).

9. c. Cette méthode est plus intéressante que l'algorithme du pivot si :

- on peut effectivement choisir λ pour que $\alpha < 1$;
- on effectue sensiblement moins d'opérations que pour l'algorithme du pivot, soit pour $n \ll d$;
- d'après **[2.a.]**, on sait dominer l'erreur résiduelle après la n-ième itération :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n - \ell\| \leqslant \alpha^n\,\|x_0 - \ell\|$$

il faut donc choisir x_0 assez proche de ℓ (mais comment ???) et α assez proche de 0 (est-ce possible ???) pour que le nombre n d'itérations soit petit devant la dimension d.

Ça commence à faire beaucoup de *si* !

Partie C.

10. On a

$$C = \begin{pmatrix} 1-4\lambda & \lambda & \lambda \\ -\lambda & 1-4\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1-5\lambda \end{pmatrix}$$

donc

$$\alpha = \max\{|1-4\lambda| + 2|\lambda|;\ |1-5\lambda| + 2|\lambda|\}$$

(les contributions des deux premières lignes de C sont identiques) et $\alpha < 1$ si, et seulement si,

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| < 1 \quad \textbf{et} \quad |1-5\lambda| + 2|\lambda| < 1.$$

11. Pour $\lambda = 1/4$, on a

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |1-5\lambda| + 2|\lambda| = \frac{3}{4}$$

donc $\alpha = 3/4 < 1$.

❧ Pour $0 < \lambda \leqslant 1/4$, on a

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| = 1 - 4\lambda + 2\lambda = 1 - 2\lambda$$

tandis que pour $1/4 \leqslant \lambda$, on a

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| = 4\lambda - 1 + 2\lambda = 6\lambda - 1.$$

D'autre part, pour $0 < \lambda \leqslant 1/5$, on a

$$|1-5\lambda| + 2|\lambda| = 1 - 5\lambda + 2\lambda = 1 - 3\lambda$$

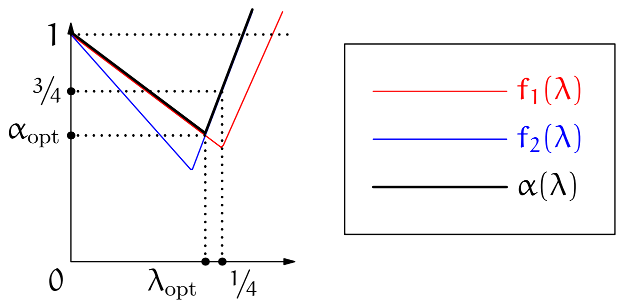
tandis que pour $1/5 \leqslant \lambda$, on a

$$|1-5\lambda| + 2|\lambda| = 5\lambda - 1 + 2\lambda = 7\lambda - 1.$$

On peut ainsi facilement tracer les graphes des fonctions

$$f_1 = [\lambda \mapsto |1-4\lambda| + 2|\lambda|] \quad \text{et} \quad f_2 = [\lambda \mapsto |1-5\lambda| + 2|\lambda|]$$

et en déduire le graphe de leur maximum, c'est-à-dire le graphe de $[\lambda \mapsto \alpha]$.



On voit ainsi qu'en prenant λ un peu inférieur à $1/4$, on obtient un α sensiblement plus petit (proche de $1/2$).

12. La résolution détaillée doit figurer sur la copie. En particulier, chaque étape de l'algorithme doit être codée selon les notations usuelles.

La solution du système est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$