Réduction des endomorphismes

1. On calcule le polynôme caractéristique en effectuant des opérations de pivot avant de développer. Avec un peu de chance, on peut ainsi obtenir une forme factorisée du polynôme caractéristique.

$$\begin{vmatrix} -5-X & 2 & 2 \\ -8 & 1-X & 6 \\ -8 & 2 & 5-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5-X & 2 & 2 \\ -8 & 1-X & 6 \\ 0 & 1+X & -1-X \end{vmatrix}$$

$$(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$

$$= (1+X) \begin{vmatrix} -5-X & 2 & 2 \\ -8 & 1-X & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+X) \begin{vmatrix} -5-X & 4 & 2 \\ -8 & 7-X & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(C_2 \leftarrow C_2 + C_3)$$

$$= -(1+X)\big[(X+5)(X-7)+32\big]$$

On en déduit que

$$\chi = (X+1)^2(X-3).$$

❧ Le spectre de A est $\{-1, 3\}$. Comme 0 n'est pas valeur propre, on en déduit que A est inversible.

❧ La valeur propre -1 est double et le rang de

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -8 & 2 & 6 \\ -8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

est (visiblement) supérieur à 2, donc la dimension du sous-espace propre associé à -1 est strictement inférieure à la multiplicité de la valeur propre.

Cela suffit pour que A ne soit pas diagonalisable **[Thm 90]**.

✍ *Si on est un peu curieux, on peut vérifier que le sous-espace propre associé à -1 est la droite dirigée par $(1,1,1)$ et que le sous-espace propre associé à 3 est la droite dirigée par $(1,2,2)$.*

On n'est alors pas surpris de retrouver ces vecteurs à la question suivante...

2. Si $\mu = 0$, alors il est clair que la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre !

Si $\mu \neq 1$, alors on peut supposer que $\mu = 1$ (le fait de multiplier e_2 par un scalaire non nul ne change pas le rang de la famille).

Il s'agit alors de vérifier que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1+\lambda \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

est inversible. On vérifie sans peine que son rang est bien égal à 3, ce qui prouve que la matrice est inversible et donc que la famille (e_1, e_2, e_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : la famille $\mathscr{B}$ est une base si, et seulement si, $\mu \neq 0$.

3. Pour calculer la matrice f relative à la base $\mathscr{B}$, il faut exprimer les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2 et e_3.

On commence par calculer ces vecteurs dans la base canonique.

❧ Comme
$$A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix},$$
on a $f(e_1)=3\cdot e_1$.

❧ Comme
$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$
on a aussi $f(e_2)=-e_2$ (quelle que soit la valeur de $\mu\neq 0$).

❧ Enfin, on a
$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

❧ En prenant $\lambda=0$ et $\mu=2$, on a donc
$$f(e_2)=-e_2 \qquad \text{et} \qquad f(e_3)=-e_3+e_2.$$

La matrice de f relative à $\mathscr{B}$ est donc
$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$