[64.1] Nature de quelques séries

D'après **[Ch.4 - 27.3]**,

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2^n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{3^n}\Big).$$

❧ On en déduit que

$$\zeta(n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} (1/2)^n.$$

Comme la série *géométrique* $\sum (1/2)^n$ est absolument convergente, la série $\sum[\zeta(n) - 1]$ est donc absolument convergente.

❧ Il est clair que

$$\frac{\zeta(n) - 1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\big(\zeta(n) - 1\big)$$

et comme $\sum[\zeta(n) - 1]$ est *absolument* convergente, la série

$$\sum \frac{\zeta(n) - 1}{n}$$

est absolument convergente.

❧ Enfin, l'Astuce taupinale nous indique que

$$\frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n[\zeta(n) - 1]}{n}.$$

La série

$$\sum \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n}$$

est donc convergente, en tant que somme de la série harmonique alternée

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

(série alternée et $1/n$ tend vers 0 en décroissant) et d'une série absolument convergente (étudiée précédemment).

⋆

[64.2] Sommes de deux séries

Rappel 1.

Nous allons utiliser la Formule d'Euler, qui donne un développement asymptotique des nombres harmoniques :

$$H_N = \ell n\, N + \gamma + o(1) \tag{1}$$

lorsque N tend vers $+\infty$. (Voir Chapitre 4 - III.3)

Rappel 2.

Nous allons aussi utiliser une formule issue du cours (à venir) sur les Séries entières :

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad -\ell n(1 - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{2}$$

Cette formule est vraie encore pour $x = -1$ (ce qui, pour nous, n'entre pas dans le cours sur les Séries entières) :

$$-\ell n\, 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \tag{3}$$

(a). Sommabilité de deux familles réelles

Convenons de noter $I = \mathbb{N}^{**} \times \mathbb{N}^{**}$ où (notation très personnelle !)

$$\mathbb{N}^{**} = \mathbb{N}^* \setminus \{1\},$$

et posons

$$x_{k,n} = \frac{1}{nk^n} \quad \text{et} \quad y_{k,n} = (-1)^n x_{k,n} = \frac{(-1)^n}{nk^n}$$

pour tout $(k, n) \in I$.

❧ La famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est une famille de *réels positifs*. Nous allons démontrer qu'elle est sommable grâce au Premier théorème de Fubini.

Pour cela, nous considérons la partition

$$I = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^{**}} I_n \tag{4}$$

où $I_n = \big\{(k, n) \in I,\ k \in \mathbb{N}^{**}\big\}$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, la sous-famille

$$(x_{k,n})_{(k,n)\in I_n} = \Big(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k^n}\Big)_{k\in\mathbb{N}^{**}}$$

est sommable puisque, au facteur constant $1/n$ près, c'est une série de Riemann d'exposant $n \geqslant 2$. Sa somme est égale à

$$s_n = \sum_{k=2}^{+\infty} x_{k,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{n} \cdot [\zeta(n) - 1].$$

D'après **[64.1]**, la série $\sum s_n$ est absolument convergente.

D'après le Premier théorème de Fubini, la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est bien sommable et

$$\sum_{(k,n)\in I} x_{k,n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n}. \tag{5}$$

❧ Comme $|y_{k,n}| = x_{k,n}$ pour tout $(k, n) \in I$ et que, d'après l'étude précédente, la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable, la famille $(y_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable.

(b). Calcul de la première somme

❧ Considérons maintenant une autre partition :

$$I = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^{**}} J_k \tag{6}$$

où $J_k = \big\{(k, n) \in I,\ n \in \mathbb{N}^{**}\big\}$.

Pour tout entier $k \geqslant 2$, en tant que sous-famille d'une famille sommable, la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in J_k}$ est sommable et d'après (2), sa somme s'exprime comme suit :

$$\sigma_k = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{nk^n} = \frac{-1}{k} - \ell n\Big(1 - \frac{1}{k}\Big).$$

De plus, d'après le Théorème de Fubini (le Premier ou le Second, puisque le terme général est positif), la famille $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}^{**}}$ est sommable et

$$\sum_{(k,n)\in I} x_{k,n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sigma_k = -\sum_{k=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{k} + \ell n\, \frac{k-1}{k}\Big). \tag{7}$$

Par télescopage partiel,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{k}+\ell n\,\frac{k-1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}+\sum_{k=2}^{N}[\ell n(k-1)-\ell n\,k]\\ &= (H_N-1)+(\ell n\,1-\ell n\,N)\\ &\underset{N\to+\infty}{=} (\gamma-1)+o(1)\end{aligned}$$

d'après la Formule d'Euler (1). Finalement, en combinant (5) et (7),

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\zeta(n)-1}{n} &= \sum_{(k,n)\in I} x_{k,n}\\ &= -\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}+\ell n\,\frac{k-1}{k}\right)=1-\gamma.\end{aligned}$$

(c). Calcul de la deuxième somme

❧ On l'a vu plus haut, la famille $(y_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable. En appliquant le Second théorème de Fubini aux deux partitions (4) et (6), on arrive à

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^n}\right]=\sum_{k=2}^{+\infty}\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1/k)^n}{n}\right]$$

c'est-à-dire (avec (2))

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)-1}{n}=\sum_{k=2}^{+\infty}\left[-\frac{-1}{k}-\ell n\left(1-\frac{-1}{k}\right)\right].$$

D'après (3),

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)-1}{n} &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n}-(1-\ell n\,2).\end{aligned}$$

D'autre part, avec le télescopage partiel habituel,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{N}\left[-\frac{-1}{k}-\ell n\left(1-\frac{-1}{k}\right)\right]\\ &= \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{N-1}\ell n\left(\frac{k+1}{k}\right)-\ell n\left(1+\frac{1}{N}\right)\\ &= (H_N-1)-[\ell n\,N-\ell n\,2]-\ell n\left(1+\frac{1}{N}\right)\\ &= (\ell n\,2-1+\gamma)+o(1) \qquad \text{(pour } n\to+\infty)\end{aligned}$$

avec la formule d'Euler (1). On obtient ainsi

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n}=\gamma.$$