Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2020/2021 **MP**

Composition de Mathématiques

Le 215-ième anniversaire de la bataille d'Austerlitz – De 13 heures à 17 heures

---

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Partie A. Transformée de Laplace

Pour $x > 0$, on note

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt,$$

$$G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t\, dt, \quad H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos t\, dt.$$

1. Démontrer que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \qquad |\sin t| \leqslant t.$$

2. Démontrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $\Omega =]0, +\infty[$.

3. Démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0.$$

4. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et exprimer F' à l'aide de G.

5. Trouver une expression simple pour G et pour H.
☞ *On pourra calculer* $H(x) + iG(x)$.

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos \alpha t\, dt$$

pour tout $\alpha > 0$.

6. En déduire une expression simple pour F. Tracer l'allure du graphe de F.

Partie B. Formule de Viète

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\forall\, 0 < t < 2^n \pi, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{t}{2^k} = \frac{\sin t}{2^n \sin(2^{-n} t)}.$$

8. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, t > 0, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{t}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k-1)t}{2^n}.$$

☞ *On pourra raisonner par récurrence en s'appuyant sur la formule*

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \qquad \cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}.$$

9. En déduire que

$$\forall\, t > 0, \qquad \frac{\sin t}{t} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k-1)t}{2^n}.$$

10. Démontrer que

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos \frac{(2k-1)t}{2^n} e^{-xt}\, dt$$

pour tout $x > 0$.
☞ *On pourra poser*

$$f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k-1)t}{2^n} e^{-xt}$$

pour tout $t > 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

11. En déduire que

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}.$$

12. L'objet de cette dernière question est de redémontrer le résultat précédent.

12. a. En exprimant la quantité étudiée à l'aide d'une somme de Riemann, déterminer la limite de

$$2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

12. b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leqslant \frac{4 \cdot 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \cdot \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

pour tout $0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$.

12. c. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

et conclure.

❖ II – Problème ❖

Dans ce problème, la lettre i désigne un nombre complexe tel que $i^2 = -1$. **On s'interdira donc d'utiliser cette lettre pour tout autre usage.**

Partie A. Étude en dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et décomposer le polynôme caractéristique de A en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. En déduire que la matrice A est diagonalisable. Préciser les valeurs propres de A, ainsi que la dimension des différents sous-espaces propres.

☞ *On ne cherchera pas à déterminer plus précisément les sous-espaces propres de A.*

3. Calculer et décomposer le polynôme caractéristique de B en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Vérifier que

$$\chi_A = i\chi_B(iX).$$

4. La matrice B est-elle diagonalisable en tant que matrice réelle ? en tant que matrice complexe ? On donnera les valeurs propres de B ainsi que la dimension des sous-espaces propres dans chacun des deux cas.

☞ *On ne cherchera pas à déterminer plus précisément les sous-espaces propres de B.*

5. On considère la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}).$$

Exprimer $D^{-1}AD$ en fonction de B.

Partie B. Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un entier naturel **fixé**. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on note

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k x . \sin^{n-k} x.$$

On note V_n, l'espace vectoriel **complexe** engendré par les applications $f_0, \dots, f_n$:

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n).$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on note

$$g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}.$$

6. Démontrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre. En déduire la dimension de V_n.

7. Démontrer que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad f'_k \in V_n.$$

En déduire que

$$\varphi_n = [f \mapsto f']$$

définit un endomorphisme de V_n. Vérifier que la matrice de cet endomorphisme relative à la base $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

8. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}.$$

9. En déduire, à l'aide de la formule du binôme, que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad g_k \in V_n.$$

10. Calculer g'_k pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. En déduire que φ_n est diagonalisable en précisant les valeurs propres de φ_n et ses sous-espaces propres.

11. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

12. Décomposer g_n dans la base $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. En déduire que

$$\mathrm{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

où on note

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}.$$

Partie C. Les matrices de Kac

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un entier naturel fixé. On étudie dans cette partie la matrice tridiagonale $A_n \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ définie par :

- $a_{k,k+1} = k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$;
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$ pour $2 \leqslant k \leqslant n+1$
- et tous les autres coefficients sont nuls.

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

On considère enfin la matrice diagonale

$$D_n = \mathrm{Diag}(i^{k-1},\ 1 \leqslant k \leqslant n+1) \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

13. Démontrer que

$$D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n$$

(où B_n est la matrice étudiée dans la partie précédente).

En déduire une relation simple entre les polynômes caractéristiques χ_{A_n} et χ_{B_n}.

14. En déduire que

$$\mathrm{Sp}(A_n) = \{2k - n,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$$

et que

$$\mathrm{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

où $p_k = \binom{n}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

Extraits du rapport du jury

Remarques générales

Un nombre important de candidats ne prennent pas le recul nécessaire pour voir que des questions sont utiles pour répondre efficacement aux suivantes. Une partie de problème est rarement une succession d'exercices indépendants.

Une attention particulière doit être donnée à la précision dans l'utilisation des résultats du cours. Il arrive trop souvent qu'une hypothèse soit oubliée ou que la vérification rigoureuse de celle-ci soit remplacée par l'affirmation que l'hypothèse est bien satisfaite.

Les majorations sont comme chaque année source de difficultés. La valeur absolue et le module ne sont pas employés avec aisance et il est très fréquent de rencontrer des inégalités entre nombres complexes ou des tentatives de comparaison/domination sans vérification de la positivité des fonctions considérées.

Premier problème

1. Si certains ont pensé à la solution consistant à appliquer une inégalité des accroissements finis, beaucoup s'en sortent avec des études de fonctions. Deux erreurs fréquentes dans ce cas : penser qu'il suffit de démontrer que sin $\leqslant$ t ou, plus préoccupant, d'affirmer que $[t \mapsto |\sin t| - t]$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $[t \mapsto |\cos t| - 1]$.

2. La domination en $+\infty$ a été bien menée par bon nombre de candidats. Cette question a mis en lumière une confusion très fréquente entre la preuve de la convergence et celle de la continuité d'une intégrale à paramètre.

Attention également lorsque la convergence de l'intégrale est justifiée par comparaison ou lorsque l'on vérifie une hypothèse de domination à s'assurer de comparer des fonctions positives.

3. Notons que trop de candidats ont ignoré le problème d'interversion et ont affirmé que puisque l'intégrande tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, il en va de même pour $F(x)$.

Parmi ceux qui ont abordé la justification de la convergence, si certains ont pensé à utiliser **1.**, d'autres se sont lancés dans une application du théorème de convergence dominée. Dans le premier cas, beaucoup de candidats ont trop rapidement conclu à partir de $F(x) \leqslant 1/x$ et pas de $|F(x)| \leqslant 1/x$.

En cas d'utilisation du théorème de convergence dominée, remarquons qu'il n'est pas suffisant de considérer uniquement la suite de terme général $x_n = n$.

4. Cette question d'application du cours a été souvent bien traitée et un nombre satisfaisant de candidats ont pensé à vérifier la domination sur les intervalles du type $[a, +\infty[$. Certains candidats n'ont cependant pas compris que dans la domination, le paramètre doit disparaître.

5. Cette question a été en général bien traitée par les candidats qui l'ont abordée. Notons tout de même quelques réticences chez certains à utiliser l'intégration d'une fonction à valeurs complexes (ils ont alors préféré une double intégration par parties), d'assez fréquentes erreurs de signe et un dernier résultat trop souvent affirmé avec une justification du type "*en effectuant un calcul similaire, on prouve que...*".

6. Il est regrettable que près de la moitié des candidats aient oublié que, puisque F est une primitive de G, il y a une constante à déterminer pour en déduire une expression de F.

7. Cette question a été étonnamment abandonnée par une proportion non négligeable de candidats ayant pourtant identifié la formule trigonométrique à appliquer. Ceux qui sont allés au bout de la question ont en général bien rédigé la récurrence.

8. Bien que plus difficile que la précédente, cette question a été plus souvent abordée. Le mécanisme de la récurrence est souvent bien initié et l'indication utilisée. Peu de candidats ont vu la séparation entre indices pairs et impairs et une minorité sont parvenus à la rédiger de manière satisfaisante.

Notons que certains sont parvenus "miraculeusement" au résultat sans justifier la partie sur les indices. Il convient de rappeler que ce type de démarche a très peu de chances d'abuser le correcteur.

9. Synthèse des résultats précédents, en général bien traitée.

10. L'application correcte du théorème de convergence dominée reste une difficulté pour une majorité de candidats. De nouveau la domination laisse trop souvent la variable n présente.

Les dernières questions du Problème 1 ont été assez peu traitées. Notons pour **12.a.** que la plupart des candidats n'ont pas vu que la somme comportait un terme "de trop" pour être exactement une somme de Riemann.

Deuxième problème

1. à **3.** Il s'agit de questions assez faciles et souvent bien traitées. Certains perdent en efficacité en calculant un discriminant pour factoriser $x^2 + 4$.

4. L'erreur la plus fréquente a été de justifier la non diagonalisabilité de B sur $\mathbb{R}$ par le fait que son polynôme caractéristique n'est pas scindé à racines simples.

5. Bien réussie en général. Certains ont perdu du temps en effectuant un pivot de Gauss pour calculer l'inverse d'une matrice diagonale.

6. Cette question était plus difficile et a été correctement traitée par peu de candidats. Beaucoup ont pensé à évaluer en 0 ou en $\pi/2$, mais peu sont parvenus à donner un argument précis et se sont contentés d'un trop évasif "*on dérive* $n/2$ *fois*" ou d'un "*on divise par* sin *et on évalue en* $x = 0$" sans justification du prolongement par continuité.

7. Ce calcul de dérivée a posé problème à un certain nombre de candidats. Parmi ceux qui y sont parvenus, trop peu ont pensé à distinguer les cas $k = 0$ et $k = n$.

8. Question généralement bien traitée.

9. La formule du binôme de Newton est connue, mais on lit ensuite trop souvent des arguments du type "g_k *est le produit de deux fonctions de* V_n, *donc* g_k *est un élément de* V_n" sans plus d'explication.

Un autre raisonnement récurrent et faux : certains ont montré l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k(x) = [2\cos x]^n$$

puis ont affirmé que puisque le terme de droite était élément de V_n, il en allait de même pour chaque terme de la somme.

10. Bien traitée par la minorité de candidats qui l'ont abordée.

11. Peu traitée

13. Le calcul matriciel a été rarement correctement mené.

La relation entre les polynômes caractéristiques a été souvent affirmée sans justification et trop de candidats pensent que le déterminant est linéaire.

14. Cette question a été peu abordée. Certains sont parvenus à justifier la forme des valeurs propres de A_n, mais pratiquement aucun n'est parvenu à justifier correctement l'espace propre demandé.

Solution I ❁ La fonction sinus cardinal

Partie A. Transformée de Laplace

1. La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est bornée :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{d \sin t}{dt}\right| = |\cos t| \leqslant 1.$$

D'après l'Inégalité des accroissements finis, la fonction sin est donc 1-lipschitzienne et en particulier

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t - \sin 0| \leqslant 1 \cdot |t - 0|$$

d'où

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad |\sin t| \leqslant t.$$

VARIANTE.— On peut aussi établir l'encadrement

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad -t \leqslant \sin t \leqslant t$$

en déduisant le signe de $t + \sin t$ et celui de $t - \sin t$ de l'étude des variations de ces deux fonctions. L'une des deux fonctions doit alors être étudiée avec grand soin, on peut se contenter d'indiquer que l'étude de l'autre fonction suit le même raisonnement (il n'y a pas vraiment de différence entre ces deux études).

2. Les trois intégrandes sont manifestement des fonctions continues de t sur $]0, +\infty[$. Grâce à l'encadrement établi au **1.**, ces trois fonctions sont majorées en valeur absolue par e^{-xt} et comme $x > 0$, ce majorant est une fonction de t intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent, les trois fonctions F, G et H sont bien définies sur Ω.

REMARQUE.— Ici encore, il est hors de question de faire plusieurs fois la même chose. J'ai pris le parti d'exposer les propriétés communes aux trois intégrandes, mais j'aurais aussi bien pu traiter seulement le cas de $F(x)$ avant d'indiquer que les arguments étaient aussi valables pour $G(x)$ et $H(x)$.

3. D'après **1.**,

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, t > 0, \quad \left|\frac{\sin t}{t} e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}.$$

D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\forall\, x > 0, \quad |F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$$

et par encadrement, on en déduit bien que

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0.$$

REMARQUE.— On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée :

– pour tout $t > 0$, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\right]$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$;

– pour tout $x > 0$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\right]$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ (déjà démontré) ;

– pour tout $t > 0$ et tout $\boxed{x \geqslant 1,}$

$$\left|\frac{\sin t}{t} e^{-xt}\right| \leqslant e^{-t}$$

où le majorant est indépendant de x et intégrable sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction de t.

On peut alors en déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt = \int_0^{+\infty} 0\, dt = 0.$$

On constate que cette méthode est plus longue (et plus délicate) à mettre en œuvre.

4. Posons $I = \Omega =]0, +\infty[$ et

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \Omega, \quad \varphi(x, t) = \frac{\sin t}{t}\, e^{-xt}.$$

❧ On a déjà démontré que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto \varphi(x, t)]$$

était intégrable sur I.

❧ Il est clair que

$$[x \mapsto \varphi(x, t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et comme

$$\forall\, (x, t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -\sin t . e^{-xt}$$

on sait déjà par **2.** que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right]$$

est intégrable sur I.

❧ Il reste à vérifier la **condition de domination**. Pour tout $a > 0$,

$$\forall\, (x, t) \in [a, +\infty[\times I, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en tant que fonction de t.

❧ On peut donc appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Par conséquent, la fonction F est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$\Omega = \bigcup_{a > 0} [a, +\infty[$$

et

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\, dt = -G(x).$$

5. Soit $x > 0$. Comme les fonctions

$$\left[x \mapsto e^{-xt} \sin t\right] \quad \text{et} \quad \left[x \mapsto e^{-xt} \cos t\right]$$

sont intégrables sur I par **2.**, la linéarité de l'intégrale nous donne

$$H(x) + iG(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\, dt = \frac{1}{x - i} = \frac{x + i}{1 + x^2}.$$

Remarque.— On doit connaître la valeur de cette intégrale, même avec une constante complexe.

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad G(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad H(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

❧ Comme $\alpha > 0$, on peut effectuer le changement de variable affine $u = \alpha t$. On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos \alpha t \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(x/\alpha)u} \cos u \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} H\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) = \frac{x}{\alpha^2 + x^2}.$$

6. Avec **4.** et **5.**, on sait que

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

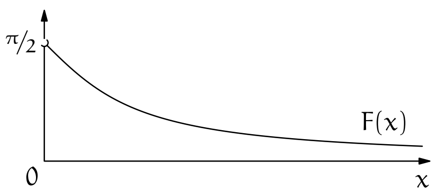
Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, il existe donc une constante C telle que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = C - \operatorname{Arctan} x.$$

D'après **3.**, on a $C = \pi/2$ et donc

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}.$$

❧ Le tracé du graphe de F ne doit poser aucun problème !



Partie B. Formule de Viète

7. Nous allons procéder par récurrence en exploitant la formule bien connue :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad \sin a = 2 \sin a/2 \cos a/2. \qquad (\star)$$

Pour $n = 1$, les deux membres de l'égalité sont égaux à $\cos t/2$ pour tout $0 < t < 2\pi$ (en prenant $a = t$ dans $(\star)$).

Supposons que l'identité soit vérifiée pour un certain rang $n \geqslant 1$.

❧ Pour $0 < t < 2^n\pi$, on a bien

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{t}{2^k} = \frac{\sin t}{2^n \sin(2^{-n}t)} \cdot \cos \frac{t}{2^{n+1}} \qquad \text{(HR)}$$

$$= \frac{\sin t . \cos(2^{-(n+1)t})}{2^{n+1} \sin(2^{-(n+1)}t) . \cos(2^{-(n+1)}t)} \qquad (\star) \text{ avec } a = 2^{-n}t$$

$$= \frac{\sin t}{2^{n+1} \sin(2^{-(n+1)}t)}.$$

❧ Pour $t = 2^n\pi$, le premier membre est nul, puisque le dernier facteur est égal à

$$\cos \frac{2^n\pi}{2^{n+1}} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

et le second membre est nul aussi :

$$\frac{\sin 2^n\pi}{2^{n+1} \sin \pi/2} = 0.$$

❧ Considérons enfin la seconde moitié de l'intervalle, c'est-à-dire les réels $2^n\pi < t < 2^{n+1}\pi$. Pour appliquer l'hypothèse de récurrence à

$$0 < t - 2^n\pi < 2^n\pi,$$

nous allons poser

$$t = (t - 2^n\pi) + 2^n\pi.$$

Considérons le premier membre :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{t}{2^k} = \prod_{k=1}^{n} \cos\Big(\frac{t - 2^n\pi}{2^k} + 2^{n-k}\pi\Big) \cdot \cos \frac{t}{2^{n+1}} = -\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{t - 2^n\pi}{2^k} \cdot \cos \frac{t}{2^{n+1}}$$

car 2^{n-k} est pair pour tout $1 \leqslant k < n$ et impair pour $k = n$ (d'où le changement de signe).

On applique HR :

$$-\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{t - 2^n\pi}{2^k} \cdot \cos \frac{t}{2^{n+1}} = \frac{-\sin(t - 2^n\pi)}{2^n \sin[2^{-n}(t - 2^n\pi)]} \cdot \cos \frac{t}{2^{n+1}} = \frac{-\sin t}{-2^n \sin(2^{-n}t)} \cdot \cos \frac{t}{2^{n+1}} = \frac{\sin t}{2^{n+1} \sin 2^{-(n+1)}t}$$

grâce à $(\star)$ avec $a = 2^{-n}t$.

8. Pour $n = 1$, les deux membres sont clairement égaux à $\cos t/2$.

Supposons que l'identité soit vérifiée pour un certain entier $n \geqslant 1$.

Pour tout $t > 0$, par hypothèse de récurrence,

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{t}{2^k} = \Big(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k-1)t}{2^n}\Big) \cos \frac{t}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \Big(\cos \frac{(4k-1)t}{2^{n+1}} + \cos \frac{(4k-3)t}{2^{n+1}}\Big).$$

Les facteurs de t prennent visiblement toutes les valeurs impaires entre 1 ($(4k-3)$ pour $k = 1$) et $2^{n+1} - 1$ ($(4k-1)$ pour $k = 2^{n-1}$). On peut donc rassembler ces deux sommes en une seule :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{t}{2^k} = \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=1}^{2^n} \cos \frac{(2\ell-1)t}{2^{n+1}}$$

puisque l'entier impair $(2\ell - 1)$ varie de 1 (pour $\ell = 1$) à $2^{n+1} - 1$ (pour $\ell = 2^n$).

L'identité est ainsi démontrée par récurrence pour tout entier $n \geqslant 1$.

9. Soit $t > 0$ **fixé**. Pour tout entier n assez grand, on a bien $t < 2^n\pi$ et donc

$$\frac{\sin t}{2^n \sin(2^{-n}t)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\frac{(2k-1)t}{2^n}$$

par **7.** et **8.** On sait bien que

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1,$$

ce qui prouve que le membre de gauche tend vers $\frac{\sin t}{t}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par conséquent, le membre de droite tend aussi vers $\frac{\sin t}{t}$ lorsque n tend vers $+\infty$, cqfd.

10. Par **5.**, la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables.

D'après **9.**, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $\frac{\sin t}{t}$, qui est bien continue sur $]0, +\infty[$.

D'après **8.**, pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\big|f_n(t)\big| = \left|\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{t}{2^k} \cdot e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}.$$

Le majorant est indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$ et intégrable sur $[0, +\infty[$, donc la convergence est dominée.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot e^{-xt}\,dt.$$

11. Par **5.** et la linéarité de l'intégrale (puisqu'il n'y a ici qu'un nombre FINI de termes dans la somme), pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{x}{\frac{(2k-1)^2}{(2^n)^2} + x^2} = 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{x}{(2k-1)^2 + 2^{2n}x^2}.$$

En particulier, pour $x = 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} = F(1)$$

d'après **10.** et $F(1) = \pi/4$ d'après **6.**

12. a. Rappelons le théorème sur les sommes de Riemann : si la fonction φ est continue sur $[0, 1]$, alors

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi\Big(\frac{k}{N}\Big) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt.$$

Or

$$2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{\big(\frac{k}{2^{n-1}}\big)^2 + 1}$$

et on reconnaît ici $N = 2^{n-1}$ et $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Comme le terme supplémentaire (pour $k = 0$) tend vers 0 :

$$\frac{2^{n+1}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

on en déduit que

$$2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

12. b. On réduit au même dénominateur, on simplifie le numérateur, on majore le numérateur :

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}, \quad |-4k+1| \leqslant 4 \cdot 2^{n-1} + 1$$

et on minore le dénominateur :

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}, \quad (2k-1)^2 + 2^{2n} \geqslant 1 + 2^{2n} > 0$$

pour trouver l'encadrement de l'énoncé.

12. c. La somme considérée compte $2^{n-1} + 1$ termes et tous ces termes sont bornés par le plus grand terme (pour $k = 0$) :

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}, \quad 0 < \frac{4 \cdot 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \leqslant \frac{4 \cdot 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{2n}}.$$

Par inégalité triangulaire, la quantité

$$\left|2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}\right)\right|$$

est donc majorée par

$$2^{n+1} \cdot (2^{n-1} + 1) \cdot \frac{4 \cdot 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ comme $\mathcal{O}(2^{-n})$.

☙ Par conséquent, la différence entre

$$2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

et

$$2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$$

tend vers 0. Comme la première expression tend vers $\pi/4$ d'après **12.a.**, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} = \frac{\pi}{4}.$$

Nous avons ainsi retrouvé le résultat établi au **11.**

Solution II ❁ Matrices de Kac

Partie A. Étude en dimension 3

1. Sans trop d'efforts :

$$\chi_A = X(X-2)(X+2).$$

2. On sait que les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Comme la matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres réelles, elle est diagonalisable et les trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles (dimension 1 pour ceux qui n'ont pas compris).

3. Pas beaucoup plus d'efforts qu'au **1.** :

$$\begin{aligned} \chi_B &= X(X^2+4) && \text{(dans } \mathbb{R}[X]) \\ &= X(X+2i)(X-2i) && \text{(dans } \mathbb{C}[X]) \end{aligned}$$

et en effet

$$i\chi_B(iX) = i \cdot iX \cdot ([iX]^2+4) = X(X^2-4) = \chi_A.$$

4. Le polynôme caractéristique de B n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, donc B n'est ni diagonalisable, ni même trigonalisable en tant que matrice **réelle**.

La seule valeur propre réelle de B est 0 et comme le rang de B est égal à 2, on en déduit que Ker B est une droite vectorielle (évidemment dirigée par le vecteur $(1,0,1)$).

❧ En revanche, en tant que matrice complexe, elle admet trois valeurs propres distinctes :

$$0 \quad \text{et} \quad \pm 2i$$

et est donc diagonalisable. De plus, chaque sous-espace propre est une droite vectorielle.

5. La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0, donc elle est inversible et

$$D^{-1} = \operatorname{Diag}(1, -i, -1).$$

On a donc

$$D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = -iB.$$

REMARQUE.— Un coup d'œil au **13.** permet de vérifier la justesse de son calcul...

Partie B. Étude d'un endomorphisme

6. Considérons une relation de liaison :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f_k(x) = 0$$

et supposons qu'au moins l'un des α_k soit non nul. On peut donc considérer

$$k_0 = \max\{0 \leqslant k \leqslant n \;:\; \alpha_k \neq 0\}.$$

Il est clair que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad f_k(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^{n-k}$$

et par conséquent

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{k_0-1} \alpha_k \cdot f_k(x)}_{=\mathcal{O}(x^{n-k_0})} + \alpha_{k_0} \cdot x^{n-k_0} + 0 = 0$$

ce qui prouve que $\alpha_{k_0} = 0$: c'est absurde !

La famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est donc libre. Comme elle engendre V_n (par construction de V_n), on en déduit que $\dim V_n = n+1$.

7. Il est clair que φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

❧ Pour tout $1 \leqslant k < n$, il est clair que

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_k'(x) = &-k \cos^{k-1} x. \sin^{n+1-k} x \\ &+ (n-k) \cos^{k+1} x. \sin^{n-1-k} x \end{aligned}$$

donc

$$\varphi(f_k) = -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1} \in V_n.$$

❧ Pour $k = 0$, on a seulement

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_0'(x) = n \cos x. \sin^{n-1} x$$

c'est-à-dire

$$\varphi(f_0) = nf_1.$$

❧ Enfin, pour $k = n$, on a

$$\varphi(f_n) = -nf_{n-1}.$$

❧ Ainsi, l'image d'une famille génératrice de V_n par φ est encore une famille de vecteurs de V_n. Le sous-espace V_n est donc stable par φ et les calculs qu'on vient d'effectuer montrent bien que la matrice de φ relative à la base $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est égale à B_n.

8. On sait que

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} \quad \text{et} \quad \cos x - i \sin x = e^{-ix}.$$

Il est donc clair que

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k} &= e^{ikx} e^{-i(n-k)x} \\ &= g_k(x). \end{aligned}$$

9. D'après la formule du binôme, $g_k(x)$ est égal à

$$\left(\sum_{j=0}^{k} a_{j,k} \cos^j x \sin^{k-j} x\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-k} b_{k,\ell} \cos^{n-k-\ell} x \sin^\ell x\right)$$

où les $a_{j,k}$ et $b_{k,\ell}$ sont des complexes qu'il n'est pas utile de préciser (ils sont indépendants de x, c'est leur principal mérite).

En développant ce produit, on obtient

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} a_{j,k} b_{k,\ell} \cos^{n-(k+j-\ell)} x \sin^{k-j+\ell} x.$$

L'exposant $k - j + \ell$ est ici compris entre 0 (pour $j = k$ et $\ell = 0$) et n (pour $j = 0$ et $\ell = n - k$), donc cette expression est bien une combinaison linéaire des $f_0(x), \ldots, f_n(x)$, ce qui prouve que g_k est bien un vecteur de V_n pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$.

REMARQUE.— Il faut savoir ici se contenter du minimum de calculs pour justifier le résultat demandé : on ne demande pas de décomposer les g_k comme combinaisons linéaires des f_j (ce qui serait bien compliqué – d'ailleurs, au **12.**, le sujet demande seulement de décomposer g_n, pas les autres !).

10. Il est clair que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \varphi_n(g_k) = g_k' = i(2k-n)g_k.$$

Comme g_k n'est pas la fonction nulle, il s'agit d'un vecteur propre de φ_n et la valeur propre associée est $i(2k-n)$.

Ainsi, l'endomorphisme φ_n admet *au moins* $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes :

$$i(2k-n) \qquad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

En tant qu'endomorphisme de V_n, espace vectoriel de dimension $n+1$, φ_n est diagonalisable, n'admet *pas d'autres* valeurs propres que

$$-in, \quad -i(n-2), \quad -i(n-4), \quad \ldots, \quad i(n-2), \quad in$$

et ses sous-espaces propres sont tous des droites vectorielles. Par conséquent,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathrm{Ker}(\varphi_n - i[2k-n]) = \mathbb{C} \cdot g_k.$$

11. Comme V_n est un espace vectoriel de dimension finie, l'endomorphisme φ_n est un automorphisme si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de φ_n. Or les valeurs propres de φ_n sont les complexes de la forme $i(2k-n)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, donc 0 est valeur propre de φ_n si, et seulement si, l'entier n est pair.

Par conséquent, φ_n est un automorphisme de V_n si, et seulement si, l'entier n est impair.

12. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) &= (\cos x + i \sin x)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cdot \underbrace{\cos^{n-k} x \sin^k x}_{f_{n-k}(x)}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^{n-k} \cdot f_k$$

(avec le changement d'indice $k \leftarrow n-k$).

❧ On a vu que g_n était un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $i(2n-n) = in$ et que

$$\mathrm{Ker}(\varphi_n - in\,\mathrm{Id}) = \mathbb{C} \cdot g_n.$$

❧ Traduit dans la base $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, cela donne

$$\mathrm{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \mathbb{C} \cdot \left(i^{n-k}\tbinom{n}{k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}.$$

Partie C. Les matrices de Kac

13. Multiplier à droite par D_n consiste à multiplier la k-ième colonne de A_n par i^{k-1}.

Multiplier à gauche par D_n^{-1} consiste à multipler la k-ième ligne de A_n par i^{1-k}.

En notant $\alpha_{k,\ell}$ les coefficients de $D_n^{-1}A_nD_n$, on a donc

$$\begin{aligned}\alpha_{k,k+1} &= i^{1-k} a_{k,k+1} i^{(k+1)-1} \\ &= ik = -ib_{k,k+1}\end{aligned}$$

pour $1 \leqslant k \leqslant n$;

$$\begin{aligned}\alpha_{k,k-1} &= i^{1-k} a_{k,k-1} i^{(k-1)-1} \\ &= -i(n-k+2) = -ib_{k,k-1}\end{aligned}$$

pour $2 \leqslant k \leqslant n+1$ et

$$\alpha_{k,\ell} = i^{1-k} a_{k,\ell} i^{\ell-1} = 0$$

pour tous les autres couples (k, ℓ).

Par conséquent,

$$D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n.$$

❧ Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, donc

$$\begin{aligned}\forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \det(\lambda I_{n+1} - A_n) &= \det(\lambda I_{n+1} + iB_n) \\ &= (-i)^{n+1} \det(i\lambda I_{n+1} - B_n)\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\chi_{A_n} = (-i)^{n+1} \chi_{B_n}(iX).$$

REMARQUE.— On rappelle que

$$\det(aB) = a^{n+1} \det B$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$ et toute matrice $B \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

14. D'après la question précédente, $\lambda \in \mathbb{C}$ est une racine de χ_{A_n} si, et seulement si, $i\lambda$ est une racine de χ_{B_n}.

On connaît depuis **10.** les valeurs propres de B_n. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(A_n) &= \left\{i\left[i(2k-n)\right],\ 0 \leqslant k \leqslant n\right\} \\ &= \left\{(n-2k),\ 0 \leqslant k \leqslant n\right\} \\ &= \left\{(2\ell-n),\ 0 \leqslant \ell \leqslant n\right\}\end{aligned}$$

en changeant d'indice ($\ell = n-k$).

❧ La matrice $A_n \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ admet donc $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, donc elle est diagonalisable.

REMARQUE.— Il s'agit d'une matrice réelle qui admet $n+1$ valeurs propres réelles distinctes, donc elle est même diagonalisable en tant que matrice réelle (= avec une matrice de passage réelle).

❧ Enfin,

$$\begin{aligned}A_nX = nX &\iff D_n^{-1}A_nD_n(D_n^{-1}X) = nD_n^{-1}X \\ &\iff B_n(D_n^{-1}X) = in(D_n^{-1}X) \qquad \text{(par \textbf{13.})} \\ &\iff D_n^{-1}X \in \mathbb{C} \cdot (q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \qquad \text{(par \textbf{12.})}\end{aligned}$$

et comme

$$D_n \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = i^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} p_0 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

on en déduit que

$$D_n^{-1}X \in \mathbb{C} \cdot (q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \iff X \in \mathbb{C} \cdot (p_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$$

et donc que

$$\mathrm{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$