Arithmétique

Soient $\mathrm{I} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *et*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_n = \big\{(p,q) \in \mathrm{I} \;:\; p \wedge q = n\big\}.$$

Alors $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$ *est une partition de* I *et comme l'application*

$$[(\alpha,\beta) \mapsto (n\alpha, n\beta)]$$

est une bijection de I_1 *sur* I_n*, alors*

$$\sum_{(p,q)\in\mathrm{I}} \frac{1}{p^2q^2} = \Big(\sum_{(p,q)\in\mathrm{I}_1} \frac{1}{p^2q^2}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\Big).$$

---

1. Quels que soient les entiers naturels *non nuls* p et q, le pgcd de p et q est supérieur à 1, donc il existe un, et un seul, entier naturel $n = p \wedge q \in \mathbb{N}^*$ tel que $(p,q) \in \mathrm{I}_n$. La famille $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une *partition dénombrable* de I.

2. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathrm{I}_1$. On pose $(a,b) = (n\alpha, n\beta)$.

Quels que soient x et y dans $\mathbb{Z}$,

$$ax + by = n(\alpha x + \beta y) \in n\mathbb{Z}$$

donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$.

Réciproquement, comme α et β sont premiers entre eux, il existe deux entiers u et v tels que $\alpha u + \beta v = 1$. On en déduit que

$$n = n \times 1 = n(\alpha u + \beta v) = au + bv \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}.$$

Par conséquent, $n\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

Finalement, on a $n\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, ce qui prouve que $(a,b) \in \mathrm{I}_n$ et donc que l'application est bien définie de I_1 dans I_n.

❧ Comme l'entier n n'est pas nul et que l'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre, l'application $(\alpha,\beta) \mapsto (n\alpha, n\beta)$ est *injective.*

❧ Enfin, si $(a,b) \in \mathrm{I}_n$, alors il existe deux entiers α et β tels que $a = n\alpha$ et $b = n\beta$. En outre (Bézout), il existe deux entiers u et v tels que

$$n = au + bv = n(\alpha u + \beta v).$$

Comme $n \neq 0$ et que l'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre, on en déduit que

$$\alpha u + \beta v = 1$$

et donc que $(\alpha,\beta) \in \mathrm{I}_1$.

Cela prouve que l'application $(\alpha,\beta) \mapsto (n\alpha, n\beta)$ est surjective de I_1 sur I_n.

3. Pour tout $(p,q) \in \mathrm{I}$, on note $u_{p,q} = {}^1\!/_{p^2q^2}$. On remarque (une fois pour toute) que $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathrm{I}}$ est une famille de *réels positifs* et on considère la partition $(\mathrm{J}_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de I définie par

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{J}_p = \big\{(p,q),\ q \in \mathbb{N}^*\big\}.$$

❧ Pour tout $q \in \mathbb{N}$ *fixé,*

$$u_{p,q} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{p^2}\Big)$$

et comme $\sum {}^1\!/_{p^2}$ est une série convergente de terme général positif, on en déduit que la sous-famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in J_p}$ est sommable.

❧ Pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\sigma_p = \sum_{(p,q)\in J_p} u_{p,q} = \frac{\zeta(2)}{p^2}$$

ce qui prouve que la famille de réels positifs $(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

D'après le théorème de Fubini, la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in I}$ est sommable et

$$\sum_{(p,q)\in I} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sigma_p = [\zeta(2)]^2.$$

4. Comme la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in I}$ est sommable, alors pour chaque entier $n \geqslant 1$, la sous-famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in I_n}$ est sommable et

$$\begin{aligned}[\zeta(2)]^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg[\sum_{(p,q)\in I_n} u_{p,q}\Bigg] = \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg[\frac{1}{n^4}\sum_{(p,q)\in I_1} u_{p,q}\Bigg]\\ &= \zeta(4)\sum_{(p,q)\in I_1} u_{p,q}\end{aligned}$$

puisque, en utilisant la bijection étudiée plus haut,

$$\sum_{(a,b)\in I_n}\frac{1}{a^2b^2} = \sum_{(\alpha,\beta)\in I_1}\frac{1}{(n\alpha)^2(n\beta)^2} = \frac{1}{n^4}\sum_{(\alpha,\beta)\in I_1}\frac{1}{\alpha^2\beta^2}.$$