➜ *Soit X, une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(2n, 1/2)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire*

$$Y = \min(X, 2n - X)$$

et calculer l'espérance de Y.

❧ En tant que fonction de X, variable aléatoire discrète, Y est aussi une variable aléatoire discrète.

❧ **Les valeurs**
Pour $0 \leqslant X(\omega) \leqslant n$, on a $n \leqslant 2n - X(\omega) \leqslant 2n$, donc

$$Y(\omega) = X(\omega) \in [\![0, n]\!]$$

et pour $n + 1 \leqslant X(\omega) \leqslant 2n$, on a $0 \leqslant 2n - X(\omega) \leqslant n$, donc

$$Y(\omega) = 2n - X(\omega) \in [\![0, n]\!]$$

donc Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

❧ **Les fréquences**
D'après la discussion précédente, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$Y(\omega) = k \iff \left| \begin{array}{l} X(\omega) = k \\ 2n - X(\omega) = k \end{array} \right.$$

donc

$$[Y = k] = [X = k] \cup [X = 2n - k].$$

Par conséquent

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(X = k) + \mathbf{P}(X = 2n - k) = 2 \cdot \binom{2n}{k} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$$

et, **cas particulier !**,

$$\mathbf{P}(Y = n) = \mathbf{P}(X = n) = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}}.$$

❧ **Espérance**
On applique la formule, avec les astuces classiques sur les coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2k \cdot \binom{2n}{k} \cdot \frac{1}{4^n} + n \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{4^n} \\
&= \frac{2}{4^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n)!}{(k-1)!(2n-k)!} + \binom{2n}{n} \cdot \frac{n}{4^n} \\
&= \frac{2 \times 2n}{4^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{k-1} + \binom{2n}{n} \cdot \frac{n}{4^n} \\
&= \frac{n}{4^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} - \binom{2n}{n} \cdot \frac{n}{4^n}.
\end{aligned}$$

Par symétrie des coefficients binomiaux,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2n-1-k} = \sum_{\ell=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{\ell}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = \frac{2^{2n-1}}{2} = 4^{n-1}.$$

Ainsi
$$\mathbf{E}(Y) = n - \binom{2n}{n} \cdot \frac{n}{4^n}.$$
On déduit de la formule de Stirling que
$$\mathbf{E}(Y) = n - \sqrt{\frac{n}{\pi}} + o(\sqrt{n})$$
lorsque n tend vers $+\infty$ (cf chapitre 4, paragraphe III.3).