Composition de Mathématiques

Le 23 septembre 2020 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Partie A. Somme d'une série célèbre

On admettra que

$$\sum_{n=1}^{m} \cos nt = \frac{\cos\frac{(m+1)t}{2} \sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

pour tout entier $m \geqslant 1$ et tout $0 < t \leqslant \pi$.

1. Soit u, une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_0^{\pi} u(t) \sin \lambda t \, dt = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$$

lorsque λ tend vers $+\infty$.

2. Vérifier que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \int_0^{\pi} \Big(\frac{t^2}{2\pi} - t\Big) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}.$$

3. On considère l'application $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = -1$ et par

$$\forall\, 0 < t \leqslant \pi, \quad f(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \Big(\frac{t^2}{2\pi} - t\Big).$$

3. a. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

3. b. Vérifier que

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\frac{(2m+1)t}{2} \, dt$$

pour tout entier $m \geqslant 1$.

3. c. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie B. Fonction définie par une somme

On étudie ici la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big).$$

4. Démontrer que S est définie sur $[0, +\infty[$.

5. Expliciter les valeurs de $S(0)$ et de $S(1)$.

6. Expliciter un réel $K > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \geqslant 0, \quad \big|S(x) - S(y)\big| \leqslant K|x - y|.$$

7. Démontrer que

$$\left|\frac{S(x) - S(y)}{x - y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\right| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\Big)|y - x|$$

quels que soient les réels positifs distincts x et y.

8. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

9. Démontrer que S est concave sur $[0, +\infty[$.

10. Par comparaison avec une intégrale, démontrer que

$$S(x) = \ell n\, x + \mathcal{O}(1)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

11. Tracer l'allure du graphe de S. On soignera en particulier l'allure aux voisinages des abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

12. On souhaite tracer l'allure du graphe de S à l'aide d'un ordinateur. Présenter les difficultés soulevées et proposer une manière de les résoudre.

❖ II – Problème ❖

On suppose connue une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de E dont la matrice relative à $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. a. Quel est le rang de A ?

1. b. Expliciter une base de $\operatorname{Ker} A$.

1. c. Calculer une représentation cartésienne de $\operatorname{Im} A$.

1. d. Les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires dans E ?

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On considère une base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle f est représenté par la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on suppose que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Identifier la matrice P et calculer P^{-1}.

❖ III – Problème ❖

On considère un intervalle I de la forme $[-a, a]$, où a est un réel strictement positif, et on note E, l'espace vectoriel complexe des applications polynomiales de I dans $\mathbb{C}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$$

et on **admet** que

$$W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Pour toute application $f \in E$, on définit les applications

$$u(f) : I \to \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad v(f) : I \to \mathbb{C}$$

par

$$\forall\, x \in I, \quad u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t)\, dt$$
$$\text{et} \quad v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t)\, dt.$$

1. Démontrer que u et v sont des endomorphismes de E.
On considère la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie sur E par

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in I} \big|f(x)\big|.$$

2. Démontrer que $\|f\|_\infty$ a bien un sens pour tout $f \in E$.

3. Déterminer un réel $k_1 > 0$ tel que

$$\forall\, f \in E, \quad \big\|u(f)\big\|_\infty \leqslant k_1 \|f\|_\infty.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n = [x \mapsto x^n]$.

4. a. Exprimer $\big\|v(f_n)\big\|_\infty$ en fonction de $\|f_n\|_\infty$.

4. b. L'application linéaire

$$v : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$$

est-elle lipschitzienne ?

5. Pour toute application $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

5. a. Démontrer que N est une norme sur E.

5. b. Déterminer un réel $k_2 > 0$ tel que

$$\forall\, f \in E, \quad \big\|v(f)\big\|_\infty \leqslant k_2 N(f).$$

Solution I ❀ Étude d'une série de fonctions

Partie A. Somme d'une série célèbre

1. Comme u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on peut intégrer par parties :

$$\int_0^\pi u(t)\sin\lambda t\,dt = \frac{1}{\lambda}\big[u(0)-u(\pi)\cos\lambda\pi\big] + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi u'(t)\cos\lambda t\,dt.$$

Le terme intégré est un $\mathcal{O}(1/\lambda)$ car la fonction cos est bornée. La fonction u' est continue sur le segment $[0,\pi]$, donc elle est bornée : il existe $M>0$ tel que

$$\forall\, t\in[0,\pi],\quad |u'(t)|\leqslant M.$$

On en déduit que

$$\forall\, t\in[0,\pi],\quad |u'(t)\cos\lambda t|\leqslant M$$

et donc que

$$\left|\int_0^\pi u'(t)\cos\lambda t\,dt\right|\leqslant\int_0^\pi |u'(t)\cos\lambda t|\,dt\leqslant M\pi.$$

Finalement,

$$\int_0^\pi u(t)\sin\lambda t\,dt=\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$$

lorsque λ tend vers $+\infty$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On intègre par parties :

$$\int_0^\pi t\cos nt\,dt=\underbrace{\Big[\frac{t\sin nt}{n}\Big]_0^\pi}_{=0}-\frac{1}{n}\int_0^\pi\sin nt\,dt=\frac{(-1)^n-1}{n^2}.$$

On intègre encore deux fois par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\cos nt\,dt&=\underbrace{\Big[\frac{t^2\sin nt}{n}\Big]_0^\pi}_{=0}-\frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin nt\,dt\\&=\frac{2}{n}\Big[\Big[\frac{t\cos nt}{n}\Big]_0^\pi-\underbrace{\int_0^\pi\frac{\cos nt}{n}\,dt}_{=0}\Big]\\&=\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.\end{aligned}$$

On obtient bien la formule attendue.

3. a. Il est évident que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (et en particulier de classe $\mathscr{C}^1$) sur l'intervalle semi-ouvert $]0,\pi]$.

Pour $t>0$ voisin de 0,

$$f(t)\sim\frac{1}{2(t/2)}t\Big(\frac{t}{2\pi}-1\Big)=-1+\mathcal{O}(t)$$

donc $f(t)$ tend vers $-1=f(0)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs strictement supérieures. Cela prouve que la fonction f est continue en 0.

❧ Le Théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ (conséquence du Théorème des accroissements finis) nous dit que : si f est continue sur $[0,\pi]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et si sa dérivée admet une limite finie ℓ au voisinage droit de 0, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et $f'(0)=\ell$.

Il nous suffit donc de vérifier que f' admet une limite à droite en 0.

Pour tout $t>0$,

$$f'(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{t/2}{\sin t/2}-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(t/2)^2\cos t/2}{\sin^2 t/2}+\underbrace{\frac{-2\sin t/2+t\cos t/2}{4\sin^2 t/2}}_{=\mathcal{O}(t)}$$

Cela prouve que $f'(t)$ tend vers $1/2\pi$ lorsque t tend vers 0 par valeurs strictement supérieures. Pour les raisons précisées plus haut, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et que $f'(0)=1/2\pi$.

3. b. Par **2.** et la linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{n=1}^m\frac{1}{n^2}=\int_0^\pi\Big(\frac{t^2}{2\pi}-t\Big)\Big(\sum_{n=1}^m\cos nt\Big)\,dt.$$

En utilisant la formule rappelée dans le préambule,

$$\Big(\frac{t^2}{2\pi}-t\Big)\Big(\sum_{n=1}^m\cos nt\Big)=2f(t)\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}$$

pour tout $0<t\leqslant 2\pi$ et il est clair que cette égalité est vraie également pour $t=0$.

On sait que

$$2\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}=\sin\frac{(2m+1)t}{2}-\sin\frac{t}{2}.$$

On en déduit enfin que

$$\sum_{n=1}^m\frac{1}{n^2}=\int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt-\int_0^\pi f(t)\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Or, pour $0<t\leqslant\pi$,

$$f(t)\sin\frac{t}{2}=\frac{t^2}{4\pi}-\frac{t}{2}$$

et cette égalité est encore vraie pour $t=0$, donc

$$\int_0^\pi f(t)\sin\frac{t}{2}\,dt=\int_0^\pi\Big(\frac{t^2}{4\pi}-\frac{t}{2}\Big)\,dt=\frac{-\pi^2}{6}.$$

La formule demandée est ainsi établie.

3. c. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, le **1.** prouve que l'intégrale du **3.b.** tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. Par conséquent, la série $\sum 1/n^2$ est convergente (ce qu'on savait déjà) et ses sommes partielles convergent vers $\pi^2/6$.

Partie B. Fonction définie par une somme

4. Pour tout $x \geqslant 0$ (fixé),

$$u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} = \mathcal{O}(1/n^2).$$

Comme la série (de Riemann) $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, la série $\sum u_n(x)$ est aussi absolument convergente, donc convergente, ce qui prouve que la fonction S est bien définie sur $[0, +\infty[$.

5. Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls, donc $S(0) = 0$.

Pour $x = 1$, on reconnaît une somme télescopique : pour tout entier $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

donc $S(1) = 1$.

6. Les deux séries $\sum u_n(x)$ et $\sum u_n(y)$ sont convergentes. Par linéarité de la somme,

$$S(x) - S(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n+y} - \frac{1}{n+x}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x-y}{(n+x)(n+y)}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, quels que soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leqslant \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

donc

$$\big|S(x) - S(y)\big| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\Big)|x-y|.$$

Le réel $K = \pi^2/6$ convient donc.

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (fixé),

$$\frac{1}{(n+x)^2} \sim \frac{1}{n^2},$$

donc la série $\sum 1/(n+x)^2$ est (absolument) convergente.

On déduit alors des calculs précédents que, quels que soient les réels positifs *distincts* x et y,

$$\begin{aligned}\frac{S(x)-S(y)}{x-y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x}\Big(\frac{1}{n+y} - \frac{1}{n+x}\Big)\\ &= (x-y)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}.\end{aligned}$$

Quels que soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leqslant \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

On en déduit donc que

$$\left|\frac{S(x)-S(y)}{x-y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\right| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\Big)|y-x|,$$

encadrement intéressant parce que la série (de Riemann) $\sum 1/n^3$ est convergente.

8. Par **6.**, on voit que S est K-lipschitzienne, donc continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par **7.**, on voit que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quels que soient les réels $0 \leqslant x \leqslant y$,

$$0 \leqslant \frac{1}{(n+y)^2} \leqslant \frac{1}{(n+x)^2}.$$

En sommant ces encadrements, on en déduit que

$$0 \leqslant S'(y) \leqslant S'(x).$$

Par conséquent, la fonction S est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme sa dérivée est décroissante, la fonction S est concave sur $\mathbb{R}_+$.

10. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ (fixé). La fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}$$

est clairement une fonction (de t) continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.

On encadre l'intégrale de f sur $[1, N]$ par des sommes partielles (*faire une figure*) et en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad S(x) - \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant S(x)$$

ce qui revient à

$$\ln(1+x) \leqslant S(x) \leqslant \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

Le minorant est $\ln x + o(1)$ et le majorant $\ln x + 1 + o(1)$. Cet encadrement prouve que

$$S(x) = \ln x + \mathcal{O}(1)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— On peut être beaucoup plus précis en usant de l'astuce taupinale et en étant un peu savant.

$$\begin{aligned}S(x) &= \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x}\Big)\\ &= \lim_{N\to+\infty} \Big[\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N\Big) + \Big(\ln N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x}\Big)\Big]\\ &= \gamma + \lim_{N\to+\infty} \Big(\ln N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x}\Big).\end{aligned}$$

Par comparaison de sommes et d'intégrales (*faire une figure*),

$$\int_{x+1}^{x+N+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x} \leqslant \int_{x}^{x+N} \frac{dt}{t}$$

donc

$$\ell n \frac{Nx}{N+x} \leqslant \ell n\, N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x} \leqslant \ell n \frac{N(x+1)}{N+x+1}.$$

Le minorant tend vers $\ell n\, x$, le majorant tend vers $\ell n(1+x)$ et le terme médian admet une limite (fait démontré un peu plus haut). On en déduit que

$$\ell n\, x \leqslant \lim_{N\to+\infty} \Big(\ell n\, N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x}\Big) \leqslant \ell n(1+x)$$

pour tout $x > 0$. Lorsque x tend vers $+\infty$, on sait que $\ell n(1+x) = \ell n\, x + o(1)$. Par conséquent,

$$S(x) = \ell n\, x + \gamma + o(1).$$

11. On sait que $S(0) = 0$ avec $S'(0) = \pi^2/6 \approx 1,7$; que $S(1) = 1$ avec

$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2} \approx 0,7.$$

Enfin, la fonction S est croissante, concave et équivalente à $\ell n\, x$ au voisinage de $+\infty$.

En tenant compte de ces informations, il est facile de tracer l'allure du graphe de S.

12. Il n'y a qu'une seule méthode pour tracer l'allure d'un graphe à l'ordinateur : calculer des points du graphe et interpoler (disons linéairement pour simplifier) ces points.

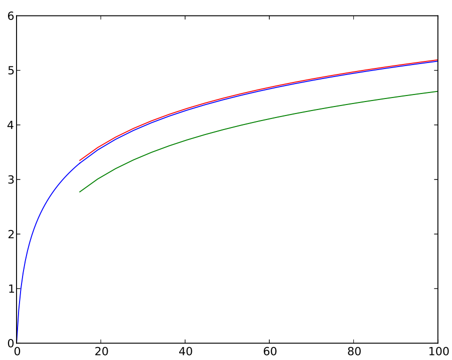
Il faut donc définir une famille d'abscisses $(x_k)_{k\in I}$ et calculer une valeur approchée raisonnable de $S(x_k)$ pour chaque valeur de k.

Comme la fonction S est croissante et concave, sa dérivée varie peu dès qu'on s'éloigne un peu de l'origine. On va donc procéder en deux étapes pour masquer les effets de l'interpolation linéaire (de telle sorte que le graphe tracé ait l'air d'une courbe $\mathscr{C}^1$ et non pas d'une ligne brisée) : on va choisir des abscisses x_k assez rapprochées au voisinage de 0 et assez éloignées les unes des autres ailleurs.

Pour tout x fixé, on doit calculer (une valeur approchée de) la somme de la série de terme général

$$u_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} \sim \frac{x}{n^2}.$$

On sait alors que le reste d'ordre n est équivalent à x/n. Pour obtenir une précision satisfaisante (à l'écran !), on imposera donc $n = 50x$.



Solution II ❀ Réduction d'une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

1. a. Les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est supérieur à 2. Par ailleurs, on peut remarquer que

$$C_3 = C_1 - C_2 \tag{1}$$

donc le rang de A est inférieur à 2. Le rang de A est donc égal à 2.

1. b. D'après le théorème du rang, la dimension de $\operatorname{Ker} A$ est égale à 1 et la relation de liaison (1) signifie que le vecteur $e_1 - e_2 - e_3$ appartient au noyau de f. Donc

$$\operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. c. L'image de A est le sous-espace engendré par les colonnes de A. Comme le rang de A est égal à 2 et que les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles,

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Le vecteur $x \cdot e_1 + y \cdot y_2 + z \cdot e_3$ appartient donc à $\operatorname{Im} f$ si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant par la troisième colonne, on en déduit que

$$\operatorname{Im} A = [x + z = 0].$$

VARIANTE.— Le vecteur (x, y, z) appartient à $\operatorname{Im} f$ si, et seulement si, il existe deux scalaires α et β tels que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire si le système

$$\begin{cases} a - b = x \\ -2a + b = y \\ -a + b = z \end{cases}$$

admet au moins une solution. En effectuant les opérations

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1,$$

on obtient le système

$$\begin{cases} a - b = x \\ -b = 2x + y \\ 0 = x + z \end{cases}$$

(équivalent au système précédent). Il est clair que le sous-système constitué des deux premières équations admet une (et une seule !) solution. Par conséquent, le système global admet une solution si, et seulement si, la contrainte $[x+z=0]$ est satisfaite.

AUTRE VARIANTE.— En calculant le produit vectoriel des deux vecteurs de base de $\operatorname{Im} f$, on obtient un vecteur orthogonal au plan $\operatorname{Im} f$, ce qui nous donne une équation cartésienne du plan.

1. d. D'après le Théorème du rang, on a bien

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$$

mais ne concluons pas trop vite !

La droite $\operatorname{Ker} f$ est dirigée par le vecteur $(1, -1, -1)$, qui vérifie l'équation cartésienne $[x+z=0]$ qui caractérise $\operatorname{Im} f$. Par conséquent,

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \neq \{0\}$$

et les deux sous-espaces vectoriels ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. On vérifie que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ce qui montre, d'après la question précédente, que $\operatorname{Im}(A^2) = \operatorname{Ker}(A)$. Par conséquent, A^3 est la matrice nulle et donc :

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad A^n = 0.$$

3. Procédons par analyse et synthèse.

ANALYSE.— Il existe une base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice de f est égale à A', **si, et seulement si,**

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_2) = f^2(\varepsilon_1) = \varepsilon_3, \quad f(\varepsilon_3) = f^3(\varepsilon_1) = 0.$$

SYNTHÈSE.— Prenons $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(e_1)$ et $\varepsilon_3 = f^2(\varepsilon_1)$. D'après les matrices A et A^2,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on voit facilement que le rang de cette matrice est égal à 3. Cette famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est donc une base de E et il est clair (d'après ce qui précède) que la matrice de f dans cette base est bien égale à A'.

❧ Un calcul classique montre que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(On peut par exemple remarquer que $e_1 = \varepsilon_1$, puis que $e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3$ et en déduire que $e_2 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3$: la matrice P^{-1} est aussi la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.)

REMARQUE.— Est-il possible de trouver une autre matrice P que celle qui précède ?

La troisième colonne de P appartient au noyau de A, *il faut donc* que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & * & -1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

La deuxième colonne est un antécédent de la troisième et la matrice A^2 nous dit quels sont les antécédents possibles :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \exists\, t \in \mathbb{R}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(la première colonne de A est une solution particulière et la solution générale est la somme de cette solution particulière et des colonnes qui appartiennent au noyau de A). Le seul paramètre possible est donc $t = 0$ et *il faut* que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & -2 & -1 \\ * & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, la première colonne de P est un antécédent de la deuxième et la matrice A nous dit quels sont les antécédents possibles :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \exists\, t \in \mathbb{R}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(même raisonnement fondé sur le principe de superposition). Le seul paramètre possible est encore $t = 0$ et la matrice P que nous avons trouvée est bien *la seule possible*.

Solution III ❀ Opérateurs linéaires continus

1. Remarquons pour commencer que toutes les intégrales qui apparaissent ici sont des intégrales de fonctions *continues* sur un *segment* : ces intégrales sont donc bien définies.

❧ Soit $f \in E$. Il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ et des scalaires complexes

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$$

tels que

$$\forall\, z \in [-a, a], \quad f(z) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k z^k.$$

En appliquant les définitions, on constate que

$$\forall\, x \in [-a, a], \quad u(f)(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{2\alpha_k W_k}{\pi}\, x^k$$

$$\text{et que} \quad v(f)(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{d} k\alpha_k W_{k-1} x^k,$$

ce qui prouve bien que $u(f) \in E$ et que $v(f) \in E$.

❧ Quelles que soient f et g dans E et $\lambda \in \mathbb{C}$, par linéarité de l'intégration,

$$\begin{aligned} \forall\, x \in I, \quad u(\lambda f + g)(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\lambda f + g)(x \sin t)\, dt \\ &= \lambda u(f)(x) + u(g)(x) \end{aligned}$$

et, par linéarité de l'intégration et de la dérivation,

$$\forall\, x \in I, \quad \nu(\lambda f + g)(x) = \lambda f(0) + g(0) + x\int_0^{\pi/2} (\lambda f' + g')(x \sin t)\, dt = \lambda\nu(f)(x) + \nu(g)(x).$$

Les applications u et ν sont donc bien des endomorphismes de E.

2. Comme f est continue (car polynomiale) sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes. Donc $\|f\|_\infty$ est bien définie pour tout $f \in E$.

REMARQUE.— L'énoncé ne demande pas de justifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

3. Soit $x \in I$. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$,

$$\big|f(x \sin t)\big| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \big|f(x\sin t)\big|\, dt \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \|f\|_\infty\, dt = \|f\|_\infty.$$

D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\forall\, x \in I, \quad \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x\sin t)\, dt\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \big|f(x\sin t)\big|\, dt \leqslant \|f\|_\infty.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in I$, on peut donc passer au sup :

$$\forall\, f \in E, \qquad \big\|u(f)\big\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

On peut donc choisir $k_1 = 1$.

REMARQUE.— Pour $f = f_0$, on a $u(f) = f$, ce qui prouve qu'on ne peut pas trouver une constante k_1 strictement plus petite que 1.

4. a. Pour $n = 0$, on a

$$\forall\, x \in I, \quad \nu(f_0)(x) = 1 = f_0(x)$$

c'est-à-dire $\nu(f_0) = f_0$.

Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\forall\, x \in I, \quad \nu(f_n)(x) = nW_{n-1}x^n$$

c'est-à-dire $\nu(f_n) = nW_{n-1}f_n$.

❧ Comme f_n n'est pas la fonction nulle, on a

$$\|f_n\|_\infty > 0$$

et d'après le calcul précédent, par homogénéité de la norme,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{\big\|\nu(f_n)\big\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = nW_{n-1}.$$

REMARQUE.— On ne se fatigue pas beaucoup pour vérifier que $\|f_n\|_\infty = a^n > 0$!

4. b. D'après le résultat admis par l'énoncé,

$$nW_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

ce qui prouve que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big\|\nu(f_n)\big\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = +\infty.$$

Par conséquent, le quotient

$$\frac{\big\|\nu(f)\big\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

n'est pas borné sur $E \setminus \{0\}$, ce qui prouve que l'application linéaire ν n'est pas lipschitzienne lorsque l'espace E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ au départ et à l'arrivée.

5. a. Commençons par vérifier que N est bien une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

Toute application $f \in E$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Par conséquent, elle est dérivable et les deux fonctions f et f' sont continues sur le segment $I = [-a, a]$. Donc $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ sont bien définies et positives. Ainsi, $N(f)$ est bien définie et positive.

❧ Vérifions ensuite que N sépare les points : supposons que $N(f) = 0$. Il est clair que

$$0 \leqslant \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N(f) = 0$$

donc $\|f\|_\infty = 0$. Or $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, donc f est alors le vecteur nul de E.

❧ Passons à l'homogénéité de N. Quel que soit le scalaire λ et l'application $f \in E$,

$$N(\lambda f) = \|\lambda f\|_\infty + \|(\lambda f')\|_\infty = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty$$

par linéarité de la dérivation. Comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, elle est positivement homogène et donc

$$N(\lambda f) = |\lambda|\,\|f\|_\infty + |\lambda|\,\|f'\|_\infty = |\lambda|\,N(f).$$

❧ Assurons-nous pour finir que N vérifie l'inégalité triangulaire. Quelles que soient les applications f et g dans E,

$$\begin{aligned} N(f+g) &= \|f+g\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty \\ &= \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \\ &\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty \\ &\leqslant N(f) + N(g) \end{aligned}$$

puisque $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité triangulaire.

❧ On a maintenant vérifié que N était bien une norme sur E.

5. b. Pour tout $x \in I$, par inégalité triangulaire,

$$\big|\nu(f)(x)\big| \leqslant \big|f(0)\big| + |x|\int_0^{\pi/2} \big|f'(x\sin t)\big|\, dt$$

Comme le max est un majorant,

$$\big|f(0)\big| \leqslant \|f\|_\infty$$

et, quels que soient $x \in I$ et $t \in [0, \pi/2]$,

$$\big|f'(x\sin t)\big| \leqslant \|f'\|_\infty$$

donc, par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^{\pi/2} \left|f'(x\sin t)\right| dt \leqslant \int_0^{\pi/2} \|f'\|_\infty \, dt = \frac{\pi}{2}\|f'\|_\infty$$

et finalement

$$\forall\, x \in I, \quad \left|v(f)(x)\right| \leqslant \|f\|_\infty + \frac{a\pi}{2}\|f'\|_\infty.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in I$, on peut donc passer au max.

$$\left\|v(f)\right\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \frac{a\pi}{2}\|f'\|_\infty \leqslant \max\left\{1,\ \frac{a\pi}{2}\right\} N(f).$$

La constante

$$k_2 = \max\left\{1,\ \frac{a\pi}{2}\right\}$$

convient donc (comme n'importe quelle constante plus grande).