Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2020/2021 **MP**

Composition de Mathématiques

Le 4 novembre 2019 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On considère le système

$$\left\{\begin{aligned} 3x + y &= 3 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right. \qquad (S)$$

1. Résoudre le système (S) pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Que peut-on en déduire sur la résolution d'un tel système avec $(x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$?
3. Résoudre le système (S) pour $(x, y) \in (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^2$.
4. Résoudre le système (S) pour $(x, y) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$.

❖ II – Problème ❖

Soient deux réels $0 < a < b$. On considère la fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \qquad f(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $f(t)$.
2. Comparer (à l'aide des relations o, $\mathcal{O}$ ou $\sim$) les expressions $f(t)$, e^{-at} et e^{-bt} lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Soient $0 < \varepsilon < A$.
3. a. Pourquoi l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{A} f(t)\,dt$$

est-elle définie ?
3. b. Démontrer que

$$\int_{\varepsilon}^{A} f(t)\,dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

NB : On citera soigneusement tous les théorèmes appliqués (avec les conditions d'application, bien entendu).
3. c. Vérifier que

$$\forall\, aA \leqslant u \leqslant bA, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-u}}{u} \leqslant \frac{e^{-aA}}{aA}.$$

En déduire que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\,du = 0.$$

3. d. Démontrer par un argument de convexité que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \ln\frac{b}{a}.$$

4. Que dire de l'intégrale suivante ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$$

❖ III – Problème ❖

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note f, l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice.

Partie A. Forme réduite de Frobenius

On pose $e_1 = (1, 0, 0)$ et on s'intéresse à la famille

$$\mathscr{F} = \left(f^k(e_1)\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

On note

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que la matrice Q_1 est inversible.
2. La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ? Quel est son rang ?
3. Démontrer que

$$Q_1^{-1} A Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Démontrer que l'ensemble

$$I_1 = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \ :\ P(f)(e_1) = 0\right\}$$

est un idéal de $\mathbb{R}[X]$. Vérifier qu'il est engendré par le polynôme

$$\mu_0 = X^3 - 4X^2 + 5X - 2.$$

5. Démontrer que μ_0 est le polynôme minimal de f.

Partie B. Factorisation du polynôme minimal

6. On suppose que le pgcd du polynôme P et de son polynôme dérivé P' est égal à $(X-a)$.

6. a. Démontrer que P est divisible par $(X-a)^2$.

6. b. Démontrer que P n'est pas divisible par $(X-a)^3$.

7. Calculer μ_1, polynôme dérivé de μ_0.

8. Expliquer brièvement pourquoi le pgcd de μ_0 et de μ_1 est aussi le pgcd de $9\mu_0$ et de μ_1.

9. Calculer la division euclidienne de $9\mu_0$ par μ_1. Le reste de cette division sera noté R_1.

Calculer la division euclidienne de μ_1 par R_1.

10. Déduire de ce qui précède une factorisation de μ_0.

Partie C. Trigonalisation

11. Calculer une base du noyau de $(A-I_3)$ et une base du noyau de $(A-2I_3)$.

12. Démontrer que $\operatorname{Ker}(A-I_3)^2$ est un plan vectoriel et calculer une équation cartésienne de ce plan.

13. On pose

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que la matrice Q_2 est inversible. En déduire, *avec un minimum de calculs*, que

$$Q_2^{-1}AQ_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie D. Puissances

14. Démontrer que les sous-espaces

$$F = \operatorname{Ker}[(f-\mathrm{Id})^2] \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})$$

sont supplémentaires dans E.

15. On note p, la projection sur F parallèlement à G et q, la projection sur G parallèlement à F.

Calculer les matrices de p et q relatives à la base canonique de $E=\mathbb{R}^3$.

16. Vérifier que les polynômes $(X-1)^2$ et $(X-2)$ sont premiers entre eux en exhibant deux polynômes U et V tels que

$$(X-1)^2U + (X-2)V = 1.$$

17. Vérifier que

$$\begin{cases} \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(p) = A(2I_3 - A) \\ \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(q) = (A-I_3)^2. \end{cases}$$

18. On reprend la matrice Q_2 introduite dans la partie précédente.

18. a. Vérifier que

$$\begin{cases} Q_2^{-1}[A(2I_3-A)]Q_2 = \operatorname{Diag}(1,1,0) \\ Q_2^{-1}[(A-I_3)^2]Q_2 = \operatorname{Diag}(0,0,1). \end{cases}$$

☞ *On préférera une justification géométrique à une justification par le calcul.*

18. b. En remarquant que $Q_2^{-1}AQ_2$ est égale à

$$\operatorname{Diag}(1,1,0) + 2\operatorname{Diag}(0,0,1) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

démontrer que

$$Q_2^{-1}(-A^2+3A-2I_3)Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. c. En déduire enfin que

$$A^k = A(2I_3-A) + 2^k(A-I_3)^2 - k(A^2-3A+2I_3)$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

Solution I ❁ Système diophantien

1. Il suffit de trois opérations de pivot pour résoudre le système dans $\mathbb{Z}^2$.

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$$
$$\sim \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

La seconde opération est une *simplification par* 2, opération permise puisque $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre.

L'unique solution de (S) dans $\mathbb{Z}^2$ est $(x, y) = (1, 0)$.

2. Comme le système ne fait intervenir que des additions et des multiplications et que la réduction modulo n est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on en déduit que

$$\big(\mathscr{C}_n(1), \mathscr{C}_n(0)\big)$$

est une solution de (S) dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ pour tout entier $n \geqslant 2$. La réciproque est fausse en général, car le morphisme

$$[k \mapsto \mathscr{C}_n(k)]$$

n'est pas injectif. Selon les valeurs de n, on doit donc s'attendre à trouver, ou pas, d'autres solutions au système (S).

3. Le déterminant du système (S) est égal à 2, qui est inversible dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ (puisque 2 et 9 sont premiers entre eux). Le système (S) est donc un système de Cramer et comme on en connaît une solution, on en déduit qu'il s'agit de *la* solution.

4. Le déterminant de (S) est bien sûr égal à 2, mais 2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (et la simplification par 2 effectuée plus haut prend ici des allures de division par zéro), donc le système (S) n'est pas un système de Cramer.

Néanmoins, la première opération de pivot est toujours valable et elle a l'avantage de faire passer à un système triangulaire.

Il reste donc à résoudre dans un premier temps l'équation

$$2x = 2$$

dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On écrit la table de multiplication par 2 dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:

x	0	1	2	3
2x	0	2	0	2

et on en déduit que l'équation $2x = 2$ possède exactement deux solutions : $x = 1$ et $x = 3$.

La seconde équation $x + y = 1$ devient alors $y = 1 - x$ et la résolution est terminée.

Dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$, le système (S) possède exactement deux solutions :

$$(1, 0) \quad \text{et} \quad (3, 2).$$

Solution II ❁ Une intégrale classique

1. Lorsque u tend vers 0,

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

donc

$$f(t) = (b - a) + \frac{a^2 - b^2}{2}\, t + o(t)$$

lorsque t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

2. Comme $a < b$, l'expression $-(b-a)t$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$ et donc

$$e^{-bt} = \underbrace{e^{-(b-a)t}}_{\to 0}.e^{-at} \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-at}).$$

On en déduit que

$$f(t) \sim \frac{e^{-at}}{t} = o(e^{-at})$$

et que (croissances comparées de t et $e^{-\alpha t}$)

$$e^{-bt} = \underbrace{te^{-(b-a)t}}_{\to 0} \cdot \frac{e^{-at}}{t} = o\big(f(t)\big)$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

3. a. La fonction f est *continue* sur $]0, +\infty[$, donc en particulier sur le *segment* $[\varepsilon, A]$. Cela prouve que l'intégrale

$$\int_\varepsilon^A f(t)\, dt$$

est bien définie.

3. b. Les fonctions

$$\left[t \mapsto \frac{e^{-at}}{t}\right] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{e^{-bt}}{t}\right]$$

sont continues sur le segment $[\varepsilon, A]$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_\varepsilon^A f(t)\, dt = \int_\varepsilon^A \frac{e^{-at}}{t}\, dt - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-bt}}{t}\, dt.$$

On effectue le changement de variable affine

$$u = at \qquad du = a\, dt$$

dans la première intégrale avec

$$\varepsilon \leqslant t \leqslant A \iff a\varepsilon \leqslant u \leqslant aA$$

et, de même, le changement de variable affine $u = bt$ dans la seconde intégrale.

On obtient alors

$$\int_\varepsilon^A f(t)\, dt = \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_{b\varepsilon}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

et d'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^A f(t)\, dt &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du + \int_{b\varepsilon}^{aA} \frac{e^{-u}}{u}\, du \\ &\quad - \int_{b\varepsilon}^{aA} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\, du \\ &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\, du. \end{aligned}$$

3. c. Pour $u \geqslant aA$, on a

$$0 < e^{-u} \leqslant e^{-aA} \quad \text{et} \quad 0 < aA \leqslant u$$

donc

$$\forall\, aA \leqslant u \leqslant bA, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-u}}{u} \leqslant \frac{e^{-aA}}{aA}.$$

❧ Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$0 < \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\,du \leqslant (bA - aA) \cdot \frac{e^{-aA}}{aA} = \frac{b-a}{a} \cdot e^{-aA}.$$

Comme $a > 0$, le majorant tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$ et par encadrement,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\,du = 0.$$

3. d. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$, donc son graphe est au-dessus de chacune de ses tangentes. En particulier,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x$$

et donc (pour $x = -u$)

$$\forall\, u > 0, \quad \frac{1-u}{u} \leqslant \frac{e^{-u}}{u} \leqslant \frac{1}{u}.$$

En intégrant cet encadrement sur $[a\varepsilon, b\varepsilon]$, on obtient alors

$$\ell n \frac{b\varepsilon}{a\varepsilon} - (b\varepsilon - a\varepsilon) \leqslant \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du \leqslant \ell n \frac{b\varepsilon}{a\varepsilon}$$

et donc, à nouveau par encadrement,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \ell n \frac{b}{a}.$$

4. En tant qu'intégrale d'une fonction continue sur l'intervalle *ouvert* $]0, +\infty[$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$$

est une intégrale généralisée.

D'après les questions précédentes, l'intégrale

$$\int_\varepsilon^A f(t)\,dt$$

tend vers une limite finie, égale à $\ell n(b/a)$, lorsque ε tend vers 0 et que A tend vers $+\infty$.

Donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$$

est convergente et sa valeur est égale à $\ell n(b/a)$.

Solution III ❁ Réduction d'une matrice

Partie A. Forme réduite de Frobenius

1. Le rang d'une matrice est invariant par les opérations de pivot donc

$$\operatorname{rg} Q_1 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$$

Une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous différents de 0 est inversible, donc la matrice Q_1 est inversible.

2. L'espace $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de *dimension finie*. Or le cardinal de la famille $\mathscr{F}$ est infini (elle est indexée par $\mathbb{N}$), donc cette famille est liée.

❧ Le rang de $\mathscr{F}$ est inférieur à $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Dans la base canonique, les vecteurs e_1, $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$ sont représentés respectivement par les colonnes suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AE_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(AE_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice Q_1 est inversible, on en déduit que la sous-famille $(f^k(e_1))_{0\leqslant k\leqslant 2}$ est libre et donc que son rang est égal à son cardinal. Donc $\operatorname{rg} \mathscr{F} \geqslant 3$.

Finalement, le rang de $\mathscr{F}$ est égal à 3.

3. Les colonnes de Q_1 représentent les vecteurs e_1, $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$ dans la base canonique. Comme Q_1 est inversible, ces trois vecteurs forment une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ (extraite de la famille $\mathscr{F}$). On déduit alors de la Formule de changement de base que la matrice $Q_1^{-1}AQ_1$ représente l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}_1$.

Comme $f(e_1) = f(e_1)$ et que $f[f(e_1)] = f^2(e_1)$, on connaît déjà les deux premières colonnes de $Q_1^{-1}AQ_1$!

$$\begin{aligned} Q_1^{-1}AQ_1 &= \mathfrak{Mat}_{(e_1, f(e_1), f^2(e_1))}\big(f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ 1 & 0 & \star \\ 0 & 1 & \star \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Enfin, le vecteur $f^3(e_1) = f[f^2(e_1)]$ est représenté dans la base canonique par

$$A(A^2E_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Un rapide calcul nous donne alors

$$f^3(e_1) = 2e_1 - 5f(e_1) + 4f^2(e_1)$$

et on en déduit que

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE.— Les fans de calcul matriciel peuvent commencer par calculer

$$Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(en indiquant précisément la méthode suivie sur la copie), puis effectuer le double produit matriciel... Comme le résultat est donné dans l'énoncé, il convient d'être prudent et de donner toutes les indications nécessaires pour prouver qu'on a *effectivement* mené les calculs !

4. L'application

$$[P \mapsto P(f)(e_1)]$$

est linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\lambda P + Q)(f)(e_1) = \lambda P(f)(e_1) + Q(f)(e_1)$$

donc son noyau I_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et en particulier, c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}[X], +)$.

D'autre part, si $P \in I_1$, alors

$$\begin{aligned}\forall\, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (QP)(f)(e_1) &= [Q(f) \circ P(f)](e_1)\\ &= Q(f)[P(f)(e_1)] \quad \text{(déf. de } \circ)\\ &= Q(f)(0) \quad \text{(car } P \in I_1)\\ &= 0 \quad \text{(linéarité de } Q(f))\end{aligned}$$

donc $PQ = QP \in I_1$.

On a ainsi démontré que I_1 était un idéal de $\mathbb{R}[X]$.

REMARQUE.— Non, l'application

$$[P \mapsto P(f)(e_1)]$$

n'est pas un morphisme d'anneaux, car l'ensemble d'arrivée n'est pas un anneau (c'est $\mathbb{R}^3$). Impossible donc de présenter I_1 comme le noyau d'un morphisme d'anneaux, il faut donc vérifier "pédestrement" qu'il s'agit bien d'un idéal de $\mathbb{R}[X]$.

❧ En tant que noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ (= espace de dimension infinie) dans $\mathbb{R}^3$ (= espace de dimension finie), le sous-espace I_1 n'est pas réduit au vecteur nul.

❧ Comme tous les idéaux non réduits à $\{0\}$ de $\mathbb{R}[X]$, l'idéal I_1 est engendré par le polynôme unitaire de plus bas degré possible dans I_1.

Comme la famille $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ est *libre*, le seul polynôme P de degré inférieur à 2 dans I_1 est le polynôme nul :

$$\begin{aligned}aX^2 + bX + c \in I_1 &\iff af^2(e_1) + bf(e_1) + ce_1 = 0\\ &\iff a = b = c = 0.\end{aligned}$$

La troisième colonne de $Q_1^{-1}AQ_1$ nous dit que

$$f^3(e_1) = 4f^2(e_1) - 5f(e_1) + 2e_1$$

c'est-à-dire que le polynôme unitaire

$$\mu_0 = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$$

appartient à I_1. Comme c'est un polynôme unitaire de plus bas degré possible dans I_1, le polynôme μ_0 est bien un générateur de I_1 (et d'ailleurs c'est même *l'unique* générateur unitaire de I_1).

5. Si P est un polynôme annulateur de f (par exemple, le polynôme minimal de f), alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \qquad P(f)(x) = 0$$

et en particulier $P \in I_1$ (pour $x = e_1$). Cela prouve que le polynôme minimal de f est divisible par μ_0 (qui engendre l'idéal I_1).

❧ Réciproquement, puisque

$$\mathscr{B}_1 = \big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, il existe trois scalaires réels a, b et c tels que

$$x = ae_1 + bf(e_1) + cf^2(e_1).$$

Donc, quel que soit le polynôme P,

$$P(f)(x) = aP(f)(e_1) + bf\big[P(f)(e_1)\big] + cf^2\big[P(f)(e_1)\big]$$

puisque $P(f)$ est linéaire et que la sous-algèbre

$$\mathbb{R}[f] \subset L(\mathbb{R}^3)$$

des polynômes en f est commutative.

En particulier, pour $P = \mu_0 \in I_1$, on a $P(f)(e_1) = 0$ et donc

$$\mu_0(f)(x) = a \cdot 0 + b \cdot f(0) + c \cdot f^2(0) = 0$$

par linéarité de f. On en déduit que μ_0 est un polynôme annulateur de f et donc que μ_0 est divisible par le polynôme minimal de f.

❧ On vient de démontrer que μ_0 était associé au polynôme minimal de f.

Ainsi μ_0, polynôme *unitaire*, est bien le polynôme minimal de f.

Partie B. Factorisation du polynôme minimal

6. a. Notons $d = \deg P$.

D'après la Formule de Taylor pour les polynômes,

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Comme $(X - a)$ divise P et P′, alors $P(a) = P'(a) = 0$ et donc

$$\begin{aligned}P &= \sum_{k=2}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k\\ &= (X-a)^2 \underbrace{\Big[\sum_{k=0}^{d-2} \frac{P^{(k+2)}(a)}{(k+2)!}(X-a)^k\Big]}_{\in \mathbb{R}[X]}.\end{aligned}$$

Donc $(X - a)^2$ divise P.

6. b. Si P était divisible par $(X-a)^3$, alors il existerait un polynôme Q tel que

$$P = (X-a)^3 Q = (X-a)^2 \cdot (X-a)Q$$

et par conséquent

$$P' = 3(X-a)^2 Q + (X-a)^3 Q' = (X-a)^2\big[3Q + (X-a)Q'\big].$$

Dans ces conditions, P et P′ seraient divisibles par $(X-a)^2$ et leur pgcd serait aussi divisible par $(X - a)^2$, ce qui n'est pas le cas.

Donc P n'est pas divisible par $(X-a)^3$.

7.
$$\mu_1 = 3X^2 - 8X + 5$$

8. Comme 9 est une constante non nulle, c'est un élément inversible de l'anneau $\mathbb{R}[X]$. Les polynômes μ_0 et $9\mu_0$ sont donc associés, donc
$$\langle \mu_0 \rangle + \langle \mu_1 \rangle = \langle 9\mu_0 \rangle + \langle \mu_1 \rangle,$$
ce qui explique pourquoi
$$\mu_0 \wedge \mu_1 = (9\mu_0) \wedge \mu_1.$$

9. On trouve d'abord
$$9\mu_0 = (3X-4)\mu_1 - 2X + 2$$
donc
$$R_1 = -2(X-1)$$
et ensuite
$$\mu_1 = \frac{-(3X-5)}{2} R_1 + 0.$$

10. D'après **8.**, **9.** et l'algorithme d'Euclide, le pgcd de μ_0 et μ_1 est donc associé à R_1, c'est-à-dire égal à $(X-1)$.

Par **6.b.**, le polynôme minimal μ_0 de f est donc divisible par $(X-1)^2$.

Une dernière division euclidienne nous donne alors
$$\mu_0 = (X-1)^2(X-2).$$

Partie C. Trigonalisation

11. Le noyau de
$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
est clairement la droite dirigée par
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(puisque $\operatorname{rg}(A - I_3) = 2$ et $C_1 + C_2 = 0$).

Le noyau de
$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
est tout aussi clairement la droite dirigée par
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
(puisque $\operatorname{rg}(A - 2I_3) = 2$ et $C_1 + C_3 = 0$).

12. Comme les trois colonnes de
$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
sont proportionnelles, le rang de cette matrice (non nulle !) est égal à 1 et son noyau est par conséquent un plan vectoriel.

Le noyau de $(A - I_3)^2$ est l'ensemble des solutions du système
$$(A - I_3)^2 X = 0.$$

Les trois équations qui constituent ce système sont proportionnelles, donc
$$\operatorname{Ker}(A - I_3)^2 = [x - y = 0].$$

13. On peut vérifier très rapidement que le rang de Q_2 est bien égal à 3 (il suffit d'effectuer $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$).

VARIANTE PLUS SAVANTE.— Les deux premières colonnes de Q_2 ne sont pas proportionnelles et appartiennent visiblement au plan $\operatorname{Ker}(A - I_3)^2$. Elles forment donc une base de ce plan.

D'autre part, la troisième colonne de Q_2 est un vecteur directeur de la droite $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$.

D'après le Théorème de décomposition des noyaux, les sous-espaces $\operatorname{Ker}(A - I_3)^2$ et $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en concaténant les bases qu'on vient de trouver, on obtient une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, la matrice Q_2 est inversible.

❧ La première et la dernière colonne de Q_2 sont des vecteurs propres de A :
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
D'après la formule de changement de base, on a donc
$$Q_2^{-1} A Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & \star & 0 \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & \star & 2 \end{pmatrix}.$$
Enfin,
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc
$$Q_2^{-1} A Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie D. Puissances

14. D'après **11.** et **12.**, le sous-espace F est un plan et le sous-espace G est une droite. La droite G est dirigée par le vecteur $(1, 0, 1)$, qui ne vérifie pas l'équation cartésienne de F, donc $F \cap G = \{0\}$.

Par conséquent, F et G sont supplémentaires dans E :
$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

15. D'après **11.**, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un scalaire $\lambda = \lambda(x) \in \mathbb{R}$ tel que
$$q(x) = \lambda \cdot (1, 0, 1) \in G$$

et d'autre part

$$p(x) = x - q(x) = (x_1 - \lambda, y_1, z_1 - \lambda) \in F$$

donc, par **12.**,

$$(x_1 - \lambda) - y_1 = 0$$

c'est-à-dire

$$\lambda = x_1 - y_1.$$

On en déduit que

$$\forall\, x = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3, \quad q(x) = (x_1 - y_1,\ 0,\ x_1 - y_1)$$

et donc que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad p(x) = (y_1,\ y_1,\ -x_1 + y_1 + z_1).$$

Par conséquent,

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Il est clair que

$$(X^2 - 2X + 1) - (X^2 - 2X) = 1.$$

Par conséquent, le couple $(U, V) = (1, -X)$ convient et d'après le Théorème de Bézout, les deux polynômes

$$(X-1)^2 \qquad \text{et} \qquad (X-2)$$

sont premiers entre eux.

REMARQUE.— Pas de zèle ! On ne demande pas toutes les solutions de l'équation de Bézout, on ne demande pas non plus comment on trouve la solution particulière : si on est assez lucide pour remarquer qu'une solution évidente existe, il ne faut pas se priver d'en faire la remarque !

17. On a calculé $(A - I_3)^2$ au **12.** et on constate avec **15.** que cette matrice est bien la matrice de la projection q dans la base canonique.

En développant $A(2I_3 - A)$, on constate également que cette autre matrice est aussi la matrice de la projection p dans la base canonique.

REMARQUE.— Par définition,

$$\forall\, x \in E, \quad p(x) + q(x) = x$$

et on constate bien que

$$A(2I_3 - A) + (A - I_3)^2 = I_3$$

(indépendamment des coefficients de la matrice A, d'ailleurs).

18. a. D'après **17.**, les matrices

$$A(2I_3 - A) \quad \text{et} \quad (A - I_3)^2$$

représentent respectivement la projection p (sur F parallèlement à G) et la projection $q = \mathrm{Id} - p$ (sur G parallèlement à F).

Comme on l'a vu plus haut ("variante savante" du **13.**), les colonnes de Q_2 sont constituées d'une base du plan F (les deux premières colonnes) et d'un vecteur directeur de la droite G (la dernière colonne).

La matrice Q_2 est donc la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à la décomposition en somme directe

$$E = F \oplus G.$$

Dans une telle base, les matrices des projections p et q sont respectivement

$$\mathrm{Diag}(1,1,0) \quad \text{et} \quad \mathrm{Diag}(0,0,1).$$

On conclut en invoquant une fois de plus la Formule de changement de base.

REMARQUE.— On peut aussi calculer comme un bourrin...

18. b. La décomposition de $Q_2^{-1}AQ_2$ suggérée par l'énoncé est évidente. On déduit de **17.** que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= Q_2^{-1}AQ_2 - Q_2^{-1}[A(2I_3 - A)]Q_2 \\
&\qquad - 2Q_2^{-1}[(A - I_3)^2]Q_2 \\
&= Q_2^{-1}[A - (2A - A^2) - 2(A^2 - 2A + I_3)]Q_2 \\
&= Q_2^{-1}(-A^2 + 3A - 2I_3)Q_2
\end{aligned}$$

18. c. La matrice $Q_2^{-1}AQ_2$ est la somme des matrices

$$M = \mathrm{Diag}(1,1,2) \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $N^2 = MN = NM = 0_3$. On peut donc déduire de la formule du binôme que

$$\begin{aligned}
Q_2^{-1}A^kQ_2 = (M+N)^k &= M^k + k \cdot M^{k-1}N \\
&= \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Diag}(1,1,0) + 2^k \cdot \mathrm{Diag}(0,0,1) + k \cdot N
\end{aligned}$$

et l'expression finale de A^k se déduit alors des relations établies au **18.a.** et au **18.b.**

REMARQUE.— Comme la matrice A est inversible, cette expression est en fait vraie pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pas seulement pour $k \in \mathbb{N}$.