

## Composition de Mathématiques

Le 50-ième anniversaire de votre serviteur – De 13 heures à 17 heures

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

*La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.*

**Les calculatrices sont interdites.  
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.**

### ❖ Problème ❖

On considère un intervalle  $I$  de la forme  $[-a, a]$ , où  $a$  est un réel strictement positif. On note  $E$ , l'espace vectoriel complexe des applications de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ ; on note  $\mathcal{P}$ , le sous-espace des applications polynomiales de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{D}$ , l'ensemble des applications  $f \in E$  qui sont développables en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence strictement supérieur à  $a$ .

1. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

1.a. Démontrer que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie, décroissante et de limite nulle. Est-elle strictement décroissante ?

1.b. Établir pour  $n \in \mathbb{N}$  une relation simple entre  $W_{n+2}$  et  $W_n$ .

1.c. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

1.d. En déduire un équivalent de  $W_n$ .

☞ On utilisera la monotonie de la suite.

### Partie A. Deux applications linéaires

Pour toute application  $f \in E$ , on définit les applications

$$u(f) : I \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad v(f) : I \rightarrow \mathbb{C}$$

par

$$\forall x \in I, \quad u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t) \, dt$$

$$\text{et} \quad v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \, dt.$$

2. Démontrer que  $u$  et  $v$  sont bien définies sur  $E$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$X^n = [x \mapsto x^n] \in E.$$

3.a. Calculer  $u(X^n)$  et  $v(X^n)$ .

3.b. En déduire que le sous-espace  $\mathcal{P}$  est stable par  $u$  et par  $v$ .

4.a. Démontrer que l'ensemble  $\mathcal{D}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

4.b. Démontrer que  $\mathcal{D}$  est stable par  $u$  et  $v$ .

5. Démontrer que l'espace  $E$  est stable par  $u$  et par  $v$ .  
On vérifiera que

$$\forall x \in I, \quad [u(f)]'(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \sin t \, dt$$

et on explicitera la dérivée  $[v(f)]^{(n)}$ .

### Partie B. Étude des composées

6. Déterminer les restrictions de  $u \circ v$  et  $v \circ u$  au sous-espace  $\mathcal{P}$ .

7. Déterminer les restrictions de  $u \circ v$  et  $v \circ u$  au sous-espace  $\mathcal{D}$ .

8. On note

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

8.a. Rappeler pourquoi  $\|f\|_\infty$  est bien définie pour toute application  $f \in E$ .

8.b. Soit  $g \in E$ . Démontrer qu'il existe une suite d'applications  $q_n \in \mathcal{P}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g' - q_n\|_\infty = 0,$$

puis qu'il existe une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications polynomiales sur  $I$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - p_n\|_\infty + \|g' - p_n'\|_\infty = 0.$$

9.a. Démontrer qu'il existe une constante  $K_1 > 0$  telle que

$$\forall f \in E, \quad \|u(f)\|_\infty \leq K_1 \|f\|_\infty.$$

9.b. Démontrer que

$$\forall f \in E, \quad \|[u(f)]'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty.$$

9.c. Démontrer qu'il existe une constante  $K_2 > 0$  telle que

$$\forall f \in E, \quad \|v(f)\|_\infty \leq K_2 \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

9.d. En déduire qu'il existe une constante  $K_3 > 0$  telle que

$$\forall f \in E, \quad \|(u \circ v)(f)\|_\infty \leq K_3 \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$$

et une constante  $K_4 > 0$  telle que

$$\forall f \in E, \quad \|(v \circ u)(f)\|_\infty \leq K_4 \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

10. Démontrer que

$$\forall f \in E, \quad (u \circ v)(f) = (v \circ u)(f) = f.$$

11. Application.

11.a. Démontrer que : si  $f \in E$  est paire, alors  $u(f)$  est paire. Que dire alors de  $v(f)$  ?

11.b. Mêmes questions en supposant que  $f \in E$  est impaire.

11.c. On suppose que  $u(f)$  est paire. L'application  $f$  est-elle paire ?

### Partie C. Étude spectrale

12. Démontrer que 0 n'est une valeur propre ni pour  $u$ , ni pour  $v$ .

13. Démontrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $v$  si, et seulement si,  $1/\lambda$  est une valeur propre de  $u$ . Que dire des vecteurs propres correspondants ?

14. Soient  $\lambda$ , une valeur propre de  $u$  et  $f \in E$ , un vecteur propre de  $u$  associé à  $\lambda$ .

14.a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$m_n = \|f^{(n)}\|_\infty.$$

Démontrer que

$$\forall x \in I, \quad |\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}$$

et en déduire que  $f$  est polynomiale.

14.b. Déterminer les valeurs propres de  $u$  et de  $v$ .

15. Existe-t-il une base de  $E$  constituée de vecteurs propres pour  $u$  ?

**Solution** ✨ **Opérateurs linéaires continus**

**1. a.** La fonction  $[t \mapsto \sin^n t]$  est continue sur le segment  $[0, \pi/2]$ , donc l'intégrale  $W_n$  est définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

✨ Pour tout  $t \in [0, \pi/2]$ , on a  $0 \leq \sin t \leq 1$ , donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t \leq 1$$

et en intégrant ces encadrements on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq W_{n+1} \leq W_n \leq 1.$$

La suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante.

REMARQUE.— En tant que suite décroissante et minorée, la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, mais sans argument supplémentaire, on ne peut pas en déduire qu'elle tend vers 0.

✨ Pour tout  $0 \leq t < \pi/2$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^n t = 0.$$

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t < \pi/2, \quad 0 \leq \sin^n t \leq 1$$

et la fonction constante  $[t \mapsto 1]$  est évidemment intégrable sur le segment  $[0, \pi/2]$ .

La convergence est donc dominée et, d'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \int_0^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^n t \, dt = 0.$$

✨ La fonction

$$\left[ t \mapsto \sin^n t - \sin^{n+1} t \right]$$

est positive et continue sur le segment  $[0, \pi/2]$ . Comme elle n'est pas identiquement nulle (elle ne s'annule qu'en  $t = 0$  et en  $t = \pi/2$ ), son intégrale, égale à  $W_n - W_{n+1}$ , est strictement positive.

La suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc strictement décroissante.

**1. b.** On intègre par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^n t (1 - \cos^2 t) \, dt \\ &= W_n - \int_0^{\pi/2} (\sin^n t \cdot \cos t) \cdot \cos t \, dt \\ &= W_n - \left[ \left[ \frac{\sin^{n+1} t}{n+1} \cdot \cos t \right]_0^{\pi/2} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n+1} t}{n+1} \cdot \sin t \, dt \right] \\ &= W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1} \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

REMARQUE.— Ceux qui connaissent *vraiment* les intégrales de Wallis calculent  $W_n - W_{n+2}$  (on ne vous en demande pas tant).

**1. c.** Les deux premières intégrales sont très faciles à calculer :

$$W_0 = \frac{\pi}{2} \quad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = 1$$

donc  $(0+1)W_0W_1 = \pi/2$ .

D'après la relation précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} (n+2)W_{n+1}W_{n+2} &= (n+2)W_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot W_n \\ &= (n+1)W_nW_{n+1} \end{aligned}$$

donc la suite de terme général  $(n+1)W_nW_{n+1}$  est constante et par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

**1. d.** Comme la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et positive, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)W_{n+1}^2 \leq (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2} \leq (n+1)W_n^2$$

donc

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{\pi}{2(n+1)} \leq W_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$$

et finalement

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

**Partie A. Deux applications linéaires**

**2.** Soit  $f \in E$ .

✨ Comme  $0 \leq \sin t \leq 1$ , on a bien

$$\forall x \in [-a, a], \forall t \in [0, \pi/2], \quad x \sin t \in [-a, a] = I$$

donc  $f(x \sin t)$  est bien définie.

Comme  $\sin$  et  $f$  sont continues, la composée

$$[t \mapsto f(x \sin t)]$$

est continue sur le segment  $[0, \pi/2]$ , donc intégrable sur cet intervalle et  $u(f)(x)$  est bien définie pour tout  $x \in I$ .

✨ Comme  $f \in E$ , alors  $f$  est dérivable et sa dérivée  $f'$  appartient aussi à  $E$ . Les arguments précédents montrent que  $v(f)(x)$  est bien définie pour tout  $x \in I$ .

REMARQUE.— Donc  $u$  et  $v$  sont bien des applications définies sur  $E$ . Elles prennent *a priori* leurs valeurs dans l'espace vectoriel  $\mathcal{A}(I, \mathbb{C})$  des applications de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ . Les questions suivantes vont préciser cela.

**3. a.** ✨ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in I$ ,

$$u(X^n)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (x \sin t)^n \, dt = \frac{2W_n}{\pi} \cdot x^n$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(X^n) = \frac{2W_n}{\pi} \cdot X^n.$$

✨ Soit  $n \geq 1$ . Pour tout  $x \in I$ ,

$$v(X^n)(x) = 0 + x \int_0^{\pi/2} n(x \sin t)^{n-1} \, dt = nW_{n-1}x^n$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v(X^n) = nW_{n-1} \cdot X^n.$$

Enfin, pour  $n = 0$  :

$$\forall x \in I, \quad v(X^0)(x) = 1 + x \int_0^{\pi/2} 0 \, dt = 1$$

donc

$$v(X^0) = X^0.$$

**3. b.** Il est clair que  $u$  et  $v$  sont des applications linéaires de  $E$  dans  $\mathcal{A}(I, \mathbb{C})$ .

On a démontré à la question précédente que les images par  $u$  et par  $v$  de la base canonique de  $\mathcal{P}$  sont des familles de vecteurs de  $\mathcal{P}$ , donc le sous-espace  $\mathcal{P}$  est stable par  $u$  et par  $v$ .

REMARQUE.— On peut aussi remarquer que l'image de la base canonique de  $\mathcal{P}$  est clairement une base de  $\mathcal{P}$ , ce qui signifie que les endomorphismes de  $\mathcal{P}$  induits par restriction de  $u$  et de  $v$  sont en fait des automorphismes de  $\mathcal{P}$ .

**4. a.** La somme d'une série entière de rayon  $R > 0$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle ouvert  $] -R, R[$ . Si  $R > a$ , alors cette application est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur le segment  $[-a, a]$  et appartient donc à l'espace vectoriel  $E$ .

Il est clair que la fonction nulle est développable en série entière au voisinage de 0 (avec un rayon de convergence infini).

Soient enfin  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;  $f$  et  $g$ , deux éléments de  $D$ , de rayons de convergence respectifs  $R_1 > a$  et  $R_2 > a$ . D'après le cours, le rayon de convergence de la série entière

$$\sum (\lambda a_n + b_n)x^n$$

est au moins égal à  $\min\{R_1, R_2\} > a$ . Par conséquent, la combinaison linéaire  $h = \lambda f + g$  appartient à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}$  est donc un sous-espace vectoriel de  $E$ .

REMARQUE.— C'est une question de cours et, comme toujours, il est difficile de savoir jusqu'où il faut entrer dans les détails de la rédaction.

**4. b.** Notons  $R > a$ , le rayon de convergence de la série entière.

Par hypothèse, il existe une suite complexe  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall u \in ] -R, R[, \quad f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n,$$

où la série  $\sum a_n u^n$  est absolument convergente, et on sait par hypothèse que  $I = [-a, a] \subset ] -R, R[$ .

✦ Pour  $|x| \leq a$  et  $t \in [0, \pi/2]$ , on a  $u = x \sin t \in I$  donc la série

$$\sum a_n x^n \sin^n t$$

est absolument convergente.

✦ La somme de cette série, égale à  $f(x \sin t)$ , est une fonction de  $t$  intégrable sur  $[0, \pi/2]$  (elle est continue sur ce segment).

✦ Enfin, d'après **1. a.**,

$$\int_0^{\pi/2} |a_n x^n \sin^n t| \, dt = W_n |a_n x^n| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a_n x^n)$$

et comme  $|x| < R$ , alors la série

$$\sum \int_0^{\pi/2} |a_n x^n \sin^n t| \, dt$$

est absolument convergente (Théorème de comparaison).

✦ On peut donc appliquer le Théorème d'intégration terme à terme (version lebesgienne) :

$$\begin{aligned} u(f)(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sin^n t \, dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} a_n x^n \sin^n t \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a_n W_n}{\pi} \cdot x^n. \end{aligned}$$

Comme cette égalité est vérifiée pour tout  $x \in ] -R, R[$ , on en déduit que  $u(f)$  appartient bien à  $\mathcal{D}$ .

✦ Comme  $f$  est développable en série entière sur  $] -R, R[$ , on sait que  $f'$  est aussi développable en série entière sur  $] -R, R[$ .

Un raisonnement analogue au précédent prouverait donc que

$$\forall x \in ] -R, R[, \quad \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n W_{n-1} x^{n-1}$$

et donc que  $v(f)$  appartient aussi à  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in ] -R, R[, \quad v(f)(x) &= f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n W_{n-1} x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n W_{n-1} x^n. \end{aligned}$$

**5.** Pour tout  $(x, t) \in I \times [0, \pi/2]$ , on pose

$$\varphi(x, t) = f(x \sin t).$$

✦ Pour tout  $t \in [0, \pi/2]$ , la fonction  $[x \mapsto \varphi(x, t)]$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  en tant que composée d'une fonction affine par la fonction  $f$  (qui est  $\mathcal{C}^\infty$  par hypothèse) :

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x \sin t & \longmapsto & f(x \sin t) \end{array}$$

car  $I = [-a, a]$  est stable par les homothéties de rapport  $\sin t \in [0, 1]$ .

Bien entendu, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\forall (x, t) \in I \times [0, \pi/2], \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) = f^{(n)}(x \sin t) \cdot \sin^n t.$$

✦ Pour tout  $x \in I$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction

$$\left[ t \mapsto \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) \right]$$

est continue sur le segment  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , donc intégrable sur ce segment.

✦ La fonction  $f$  et toutes ses dérivées  $f^{(n)}$  sont continues sur le segment  $I = [-a, a]$ , donc elles sont toutes bornées sur ce segment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in I, \quad |f^{(n)}(u)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty.$$

(On ne prétend pas que les fonctions  $f^{(n)}$  soient bornées par une même constante, on affirme seulement que chacune d'elles est bornée.)

D'après l'expression des dérivées partielles de  $\varphi$ , on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in I \times [0, \pi/2], \quad \left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \|f^{(n)}\|_\infty.$$

Le majorant est indépendant de  $t$  et intégrable sur  $I$  (les fonctions constantes sont intégrables sur tout intervalle borné).

✦ On peut donc appliquer le Théorème de Leibniz : la fonction  $u(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  et pour tout  $n \geq 1$

$$\forall x \in I, \quad [u(f)]^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f^{(n)}(x \sin t) \cdot \sin^n t \, dt.$$

✦ Passons maintenant à  $v(f)$ . Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , le raisonnement précédent peut aussi s'appliquer à  $f'$ . Par conséquent, la fonction

$$\left[ x \mapsto \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \, dt \right]$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{d^k}{dx^k} \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \, dt = \int_0^{\pi/2} f^{(k+1)}(x \sin t) \cdot \sin^k t \, dt.$$

Pour obtenir  $v(f)(x)$ , il reste à multiplier par  $x$  (fonction polynomiale) et à ajouter  $f(0)$  (fonction constante), donc la fonction  $v(f)$  est bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

D'après la formule de Leibniz (dérivation d'un produit), pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} [v(f)]^{(n)}(x) &= x \int_0^{\pi/2} f^{(n+1)}(x \sin t) \cdot \sin^n t \, dt \\ &\quad + n \int_0^{\pi/2} f^{(n)}(x \sin t) \cdot \sin^{n-1} t \, dt. \end{aligned}$$

**Partie B. Étude des composées**

6. Comme  $u$  et  $v$  sont linéaires, il suffit d'étudier  $u \circ v$  et  $v \circ u$  sur la base canonique de  $\mathcal{P}$ .

D'après 3.a. et 1.c., pour tout  $n \geq 1$ ,

$$(u \circ v)(X^n) = u(nW_{n-1}X^n) = nW_{n-1} \cdot \frac{2W_n}{\pi} X^n = X^n$$

et de même

$$(v \circ u)(X^n) = v\left(\frac{2W_n}{\pi} X^n\right) = \frac{2W_n}{\pi} \cdot nW_{n-1}X^n = X^n.$$

Enfin,

$$(u \circ v)(X^0) = u(X^0) = \frac{2W_0}{\pi} X^0 = X^0$$

et de même

$$(v \circ u)(X^0) = v\left(\frac{2W_0}{\pi} X^0\right) = v(X^0) = X^0.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u \circ v)(X^n) = (v \circ u)(X^n) = X^n$$

et donc que

$$\forall f \in \mathcal{P}, \quad (u \circ v)(f) = (v \circ u)(f) = f$$

puisque deux applications linéaires qui coïncident sur une famille de vecteurs coïncident aussi sur le sous-espace engendré par cette famille.

7. Soit  $f \in \mathcal{D}$ , la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > a$ .

✦ D'après les expressions calculées au 4.b., si

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

alors

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad u(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a_n W_n}{\pi} \cdot x^n$$

et donc

$$\begin{aligned} v(u(f))(x) &= \frac{2a_0 W_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{2a_n W_n}{\pi} \cdot W_{n-1} x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = f(x) \end{aligned}$$

pour tout  $x \in ]-R, R[$ .

✦ Un calcul en tous points analogue montrerait de même que

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad u(v(f))(x) = f(x).$$

On a donc démontré que

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad (u \circ v)(f) = (v \circ u)(f) = f.$$

Cette propriété généralise le résultat de la question précédente.

8.a. Comme  $f \in E$ , en particulier  $f$  est continue sur le segment  $I = [-a, a]$ . L'application  $|f|$  est donc bornée et atteint ses bornes sur  $I$ , ce qui justifie l'existence de  $\|f\|_\infty$ .

8.b. Comme  $g \in E$ , sa dérivée  $g'$  est continue sur le segment  $I$ . D'après le Théorème de Weierstrass, toute fonction continue sur un segment est la limite pour la convergence uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. Par conséquent, il existe une suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $\mathcal{P}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g' - q_n\|_\infty = 0.$$

✦ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\forall x \in I, \quad p_n(x) = g(0) + \int_0^x q_n(t) \, dt.$$

D'après le Théorème fondamental,  $p_n$  est une primitive de l'application polynomiale  $q_n$ , donc c'est aussi une application polynomiale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \in \mathcal{P}.$$

De plus, pour tout  $x \in I$ ,

$$|p_n(x) - g(x)| = \left| \int_0^x q_n(t) - g'(t) \, dt \right|.$$

Or

$$\forall t \in [-a, a], \quad |q_n(t) - g'(t)| \leq \|g' - q_n\|_\infty$$

donc (positivité de l'intégration)

$$\forall x \in I, \quad |p_n(x) - g(x)| \leq |x - 0| \|g' - q_n\|_\infty \leq a \|g' - q_n\|_\infty.$$

Le majorant étant indépendant de  $x \in I$ , on peut passer au sup :

$$\|p_n - g\|_\infty \leq a \|g' - q_n\|_\infty.$$

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \|p_n - g\|_\infty + \|p'_n - g'\|_\infty \leq (1 + a) \|g' - q_n\|_\infty$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - p_n\|_\infty + \|g' - p'_n\|_\infty = 0.$$

**9.a.** Soit  $x \in I$ . On a

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad |f(x \sin t)| \leq \|f\|_\infty$$

et donc, en intégrant,

$$|u(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f(x \sin t)| dt \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \|f\|_\infty.$$

Le majorant est indépendant de  $x$ , on peut donc passer au sup :

$$\forall f \in E, \quad \|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

La constante  $K_1 = 1$  convient donc.

**9.b.** On reprend l'expression de  $[u(f)]'$  donnée en 5.. Comme  $f \in E$ , alors  $f'$  appartient aussi à  $E$  et est donc bornée sur le segment  $[-a, a]$  et

$$\forall x \in I, \forall t \in [0, \pi/2], \quad |f'(x \sin t) \cdot \sin t| \leq \|f'\|_\infty \cdot 1$$

et de même qu'à la question précédente

$$\forall f \in E, \quad \|[u(f)]'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty.$$

**9.c.** On effectue toujours le même raisonnement qui nous donne

$$\forall x \in I, \quad \left| \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \|f'\|_\infty$$

et donc

$$\forall x \in I, \quad \left| x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt \right| \leq \frac{\pi a}{2} \|f'\|_\infty.$$

Comme par ailleurs  $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$ , on déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\forall x \in I, \quad |v(f)(x)| \leq \|f\|_\infty + \frac{\pi a}{2} \|f'\|_\infty$$

et donc, en majorant grossièrement le second membre,

$$\forall f \in E, \quad \|v(f)\|_\infty \leq \left(1 + \frac{\pi a}{2}\right) \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

**9.d.** Comme  $(u \circ v)(f) = u(v(f))$ ,

$$\|(u \circ v)(f)\|_\infty \leq K_1 \cdot \|v(f)\|_\infty \quad [9.a.]$$

$$\leq K_1 K_2 \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) \quad [9.c.]$$

donc  $K_3 = K_1 K_2$  convient.

De même,  $(v \circ u)(f) = v(u(f))$  et donc

$$\|(v \circ u)(f)\|_\infty \leq K_2 \cdot (\|[u(f)]\|_\infty + \|[u(f)]'\|_\infty) \quad [9.c.]$$

$$\leq K_2 \cdot (K_1 \cdot \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) \quad [9.b.]$$

$$\leq K_2 (K_1 + 1) \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$$

donc  $K_4 = K_2 (K_1 + 1)$  convient.

**10.** Soit  $f \in E$ . Par **8.b.**, il existe une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $\mathcal{P}$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - p_n\|_\infty + \|f' - p'_n\|_\infty = 0.$$

Par linéarité de  $u \circ v$ ,

$$\begin{aligned} (u \circ v)(f) - f &= (u \circ v)(f - p_n) + (u \circ v)(p_n) - f \\ &= (u \circ v)(f - p_n) - (f - p_n) \end{aligned} \quad [6.]$$

et par inégalité triangulaire

$$\|(u \circ v)(f) - f\|_\infty \leq \|(u \circ v)(f - p_n)\|_\infty + \|f - p_n\|_\infty.$$

Par **8.b.**, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$$

et avec **9.d.**, on a aussi

$$0 \leq \|(u \circ v)(f - p_n)\|_\infty \leq K_3 \cdot (\|f - p_n\|_\infty + \|f' - p'_n\|_\infty).$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on en déduit que

$$0 \leq \|(u \circ v)(f) - f\|_\infty \leq 0$$

et donc que

$$\forall f \in E, \quad (u \circ v)(f) = f.$$

De même, on démontre que

$$\forall f \in E, \quad (v \circ u)(f) = f.$$

(La seule différence est qu'on utilise cette fois le second encadrement de **9.d.** et non plus le premier encadrement.)

**11.a.** Comme  $f$  est paire,

$$\forall u \in I, \quad f(u) = f(-u)$$

et donc, en dérivant cette identité,

$$\forall u \in I, \quad f'(u) = -f'(-u).$$

On en déduit dans un premier temps que

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad u(f)(-x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(-x \sin t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t) dt \\ &= u(f)(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la fonction  $u(f)$  est elle aussi paire.

✦ De même, puisque  $f'$  est impaire,

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad v(f)(-x) &= f(0) - x \int_0^{\pi/2} f'(-x \sin t) dt \\ &= f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt = v(f)(x) \end{aligned}$$

donc la fonction  $v(f)$  est paire.

**11. b.** Si  $f$  est impaire, alors  $f(0) = 0$  et  $f'$  est paire. En suivant la même démarche qu'à la question précédente, on obtient que les fonctions  $u(f)$  et  $v(f)$  sont impaires.

**11. c.** Si  $u(f)$  est paire, alors  $v(u(f))$  est paire par **11.a.** et donc  $f$  est paire par **10.**

**Partie C. Étude spectrale**

**12.** Toujours par **10.**, si  $u(f)$  est la fonction nulle, alors

$$f = v(u(f)) = 0$$

et de même, si  $v(f)$  est la fonction nulle, alors

$$f = u(v(f)) = 0.$$

On en déduit que les endomorphismes  $u$  et  $v$  sont injectifs et que  $0$  n'est une valeur propre ni pour  $u$ , ni pour  $v$ .

**13.** Le scalaire  $\lambda$  est une valeur propre de  $v$  si, et seulement si, il existe une application  $f \in E$ , non identiquement nulle, telle que

$$v(f) = \lambda \cdot f.$$

Comme  $u$  est injective, cette propriété équivaut au fait que

$$u(v(f)) = \lambda \cdot u(f),$$

égalité qui, d'après **10.**, équivaut à

$$f = \lambda \cdot u(f)$$

ou encore à

$$u(f) = \frac{1}{\lambda} \cdot f$$

puisque  $\lambda \neq 0$  par **12.**

Cela prouve que  $\lambda$  est une valeur propre de  $v$  si, et seulement si,  $1/\lambda$  est une valeur propre de  $u$  et aussi que les vecteurs propres de  $v$  associés à  $\lambda$  sont exactement les vecteurs propres de  $u$  associés à  $1/\lambda$ .

**14. a.** ✦ Comme  $f \in E$ , cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et toutes les dérivées  $f^{(n)}$  sont continues sur le segment  $I = [-a, a]$ , ce qui justifie l'existence des  $m_n$ .

✦ Par hypothèse,  $u(f) = \lambda \cdot f$ . En dérivant cette identité  $n$  fois, on obtient

$$\lambda \cdot f^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f^{(n)}(x \sin t) \sin^n t dt$$

d'après **5.**, puis

$$|\lambda \cdot f^{(n)}(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f^{(n)}(x \sin t) \sin^n t| dt$$

par inégalité triangulaire et enfin

$$\forall x \in [-a, a], \quad |\lambda \cdot f^{(n)}(x)| \leq \frac{2}{\pi} \|f^{(n)}\|_\infty \cdot W_n$$

par **9.a.** Le majorant qu'on vient de trouver est indépendant de  $x$ , on peut donc passer à la borne supérieure :

$$|\lambda| \cdot m_n \leq \frac{2m_n}{\pi} \cdot W_n.$$

Si  $m_n > 0$ , alors on peut simplifier :

$$|\lambda| \leq \frac{2W_n}{\pi}$$

alors  $|\lambda| > 0$  par **12.** Comme  $2W_n/\pi$  tend vers  $0$  lorsque  $n$  tend vers l'infini (d'après **1.a.**), ces inégalités sont contradictoires. Par conséquent,  $m_n = 0$  à partir d'un certain rang, donc  $f^{(n)}$  est identiquement nulle à partir d'un certain rang et par conséquent  $f$  est polynomiale.

**14. b.** ✦ Par **3.a.**, la suite  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de vecteurs propres pour  $u$  et pour  $v$ , le vecteur  $X^n$  étant associé à la valeur propre  $\lambda_n = \frac{2W_n}{\pi}$  pour  $u$  et à la valeur propre  $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$  pour  $v$  (cette dernière propriété se déduisant de **3.a.** par un calcul direct ou de **13.**, sans calcul).

En particulier, les valeurs propres  $\lambda_n$  sont deux à deux distinctes.

✦ Si  $f \in E$  est un vecteur propre pour  $u$  associé à une valeur propre

$$\lambda \notin \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\},$$

alors la famille

$$(f, (X^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

est une famille libre (car une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est toujours une famille libre).

✦ Or  $f \in \mathcal{P}$  et  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathcal{P}$ , donc la famille

$$(f, (X^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

ne peut pas être une famille libre !

✦ On vient donc de démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'autre valeur propre pour  $u$  que les valeurs propres  $\lambda_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Ainsi

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$$

et, d'après **12.**,

$$\text{Sp}(v) = \left\{ \frac{1}{\lambda_n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**15.** Par **14.a.**, tout vecteur propre pour  $u$  appartient à  $\mathcal{P}$ , qui est un sous-espace strict de  $E$ . Il n'existe donc pas de base de  $E$  constituée de vecteurs propres pour  $u$ .

REMARQUE.— On dispose cependant d'une base de  $\mathcal{P}$  constituée de vecteurs propres pour  $u$  (et pour  $v$  !), le sous-espace  $\mathcal{P}$  étant dense dans  $E$  pour la convergence uniforme sur  $[-a, a]$  (Théorème de Weierstrass) et aussi pour la convergence simultanée (**8.b.**).

On n'en demande pas plus...