Composition de Mathématiques

Le 7 novembre 2018 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Soit $N \geqslant 2$, un entier naturel. On rappelle que $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif pour les opérations $\oplus$ et $\otimes$; et que

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

désigne l'ensemble des éléments inversibles de cet anneau.

1. Quelle est la structure algébrique de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$?

2. Expliquer le fonctionnement du code Python suivant.

```
def premiers_entre_eux(a, b):
  if (b==0):
    return (a==1)
  else:
    return premiers_entre_eux(b, a%b)
```

3. Écrire une fonction `inversibles(N)` qui retourne sous forme de *liste* les éléments de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$.

4. Le code suivant montre que le nombre d'éléments de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ est pair pour $3 \leqslant N \leqslant 1\,000$.

```
for N in range(2, 1000):
  G = inversibles(N)
  if (len(G)%2==1):
    print(N)
```

Démontrer que, pour tout $N \geqslant 3$, l'ordre de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ est pair.

5. Dans cette question, on suppose que $N = 24$.

5. a. Combien y a-t-il d'éléments dans $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$?

5. b. Le groupe $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?

6. Dans cette question, on suppose que $N = 29$.

6. a. Combien y a-t-il d'éléments dans $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times$?

6. b. Comment vérifier que $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times$ est un groupe cyclique engendré par la classe de 2 *en faisant le moins de calculs possibles* ?

6. c. Combien $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times$ admet-il de générateurs différents ? (On ne demande pas de les calculer.)

☞ *On commencera par justifier que les groupes*

$$\big((\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times, \otimes\big) \quad \textit{et} \quad (\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}, \oplus)$$

sont isomorphes.

❖ II – Problème ❖

Ce problème présente plusieurs documents en annexe. Les résultats exposés dans ces documents pourront être librement utilisés pour répondre aux différentes questions, à condition de faire l'objet d'une *référence précise* et d'être appliqués avec soin.

Partie A. Questions de cours

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. a. Rappeler la définition de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \big|\varphi(t)\big|\,dt.$$

☞ *On* admettra *que cette intégrale généralisée est convergente.*

1. b. En déduire que la suite de terme général

$$y_n = \int_{x_n}^{+\infty} \big|\varphi(t)\big|\,dt$$

tend vers 0, quelle que soit la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tende vers $+\infty$.

1. c. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\big[t \mapsto \varphi(t)e^{-ixt}\big]$$

est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$.

Partie B. Formule sommatoire de Poisson

Dans toute cette partie, on considère une fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

de classe $\mathscr{C}^2$ et on suppose que les trois fonctions

$$f, \quad f' \quad \text{et} \quad f''$$

sont intégrables sur $]-\infty, +\infty[$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$.

2. a. Démontrer que

$$\forall\, t \in [y, y+1], \quad \big|f(y) - f(t)\big| \leqslant \int_y^{y+1} \big|f'(u)\big|\,du.$$

2. b. En déduire que

$$\big|f(y)\big| \leqslant \int_y^{y+1} \big|f(t)\big|\,dt + \int_y^{y+1} \big|f'(t)\big|\,dt.$$

3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la famille

$$\big(f(x+p)\big)_{p\in\mathbb{Z}}$$

est sommable.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$S(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} f(x+p).$$

Démontrer que la fonction $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie est périodique, de période 1.

5. Pour tout entier $N \geqslant 1$ et tout réel x, on pose

$$S_N(x) = \sum_{p=-N}^{N} f(x+p).$$

5. a. Soient $a < b$. Démontrer que

$$\big|S(x) - S_N(x)\big| \leqslant \int_{N+a}^{+\infty} \big|f(t)\big| + \big|f'(t)\big|\,dt + \int_{-\infty}^{-N+b} \big|f(t)\big| + \big|f'(t)\big|\,dt$$

pour tout $x \in [a,b]$.

5. b. En exploitant le **document 3**, démontrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$.

5. c. Démontrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad S'(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} f'(x+p).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$c_n = \int_0^1 S(t)e^{-2in\pi t}\,dt.$$

6. a. Démontrer que les coefficients c_n sont bien définis.

6. b. Démontrer la **formule sommatoire de Poisson** :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \sum_{p\in\mathbb{Z}} f(x+p) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2in\pi x}.$$

6. c. Expliciter une suite $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall\, (n,N) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N},\quad \left|c_n - \int_0^1 S_N(t)e^{-2in\pi t}\,dt\right| \leqslant \varepsilon_N.$$

6. d. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\quad c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2in\pi t}\,dt.$$

Partie C. Calcul d'une transformée de Fourier

7. Démontrer que, pour tout $x > 0$, la fonction

$$\left[t \mapsto \varphi(x,t) = \frac{x}{x^2+t^2}e^{it}\right]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut donc poser

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}e^{it}\,dt.$$

8. Soit $[a,b] \subset \,]0,+\infty[$.

8. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in [a,b],\ \forall\, t \in \mathbb{R},\quad \big|\varphi(x,t)\big| \leqslant \frac{b}{a^2+t^2}.$$

8. b. Démontrer que

$$\forall\, x \in [a,b],\ \forall\, t \in \mathbb{R},\quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{a^2+t^2}.$$

9. En exploitant le **document 4**, démontrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall\, x > 0,\quad g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}e^{it}\,dt.$$

10. Démontrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall\, x > 0,\quad g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\,dt.$$

11. a. Calculer

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{x}{x^2+t^2}\Big) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{x}{x^2+t^2}\Big).$$

11. b. En déduire que

$$\forall\, x > 0,\quad g''(x) - g(x) = 0.$$

☞ *On pourra intégrer par parties.*

12. a. Démontrer que

$$\forall\, x > 0,\quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\,du.$$

12. b. En déduire que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

12. c. *On admet que*

$$\forall\, y \in \mathbb{R},\quad |e^{iy} - 1| \leqslant |y|.$$

Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$\forall\, A > 0,\quad \big|g(x) - \pi\big| \leqslant x\,\ell n(1+A^2) + 4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{A}.$$

En déduire que $g(x)$ tend vers π au voisinage de $+\infty$.

12. d. Démontrer que

$$\forall\, x > 0,\quad g(x) = \pi e^{-x}.$$

13. Calculer la transformée de Fourier

$$T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\,du$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie D. Application

14. Soit $\alpha > 0$. En appliquant ce qui précède, démontrer que

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha^2+(x+p)^2} = \frac{\pi}{\alpha}\,\frac{\mathrm{sh}(2\pi\alpha)}{\mathrm{ch}(2\pi\alpha) - \cos(2\pi x)}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Annexe

Document 1 Familles sommables indexées par $\mathbb{Z}$

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est un ensemble dénombrable.
2. Une famille de nombres complexes $(u_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, il existe une constante M telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=-n}^{n} |u_p| \leqslant M.$$
3. Une famille de nombres complexes $(u_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, les deux séries $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p$ et $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{-p}$ sont absolument convergentes.
4. En particulier : si la famille $(u_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable, alors u_p tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$ et lorsque p tend vers $-\infty$.
5. Si la famille $(u_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable, alors les limites
$$\lim_{m\to-\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=m}^{n} u_p \qquad \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to-\infty}\sum_{p=m}^{n} u_p$$
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=-n}^{n} u_p$$
existent toutes les trois dans $\mathbb{C}$ et sont toutes les trois égales à la **somme** de cette famille.

Document 2 Séries de Fourier

Au milieu du XVIII^{e} siècle, l'étude de la propagation du son conduit à étudier les séries trigonométriques (résolution analytique de l'équation des cordes vibrantes par D'Alembert [1717-1783] et Daniel Bernoulli [1700-1782]).

Au début du XIX^{e} siècle, Joseph Fourier (1768-1830) utilise à nouveau ces séries dans l'étude de la propagation de la chaleur (*Théorie analytique de la chaleur*, 1822). Son intuition remarquable n'est pas vraiment rigoureuse et ses études, continuées par Poisson (1781-1840), seront plus tard corrigées par Dirichlet (1805-1859) et Jordan (1838-1922).

C'est l'étude de ces problèmes qui conduira Riemann (1826-1866) à donner une définition précise de l'intégrale (*Mémoire sur les séries trigonométriques*, posthume).

L'**Analyse de Fourier** (appelée aussi **Analyse harmonique**) consiste à attribuer à une fonction périodique une suite de coefficients complexes.

1. Les **coefficients de Fourier** d'une fonction f périodique, de période 1, sont les nombres complexes c_n définis par
$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2in\pi t}\,dt.$$
2. Si f est une fonction à valeurs *réelles*, alors
$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad c_{-n} = \overline{c_n}.$$

La **synthèse** de Fourier consiste, à rebours de l'analyse, à retrouver la fonction f à partir de la connaissance de ses coefficients.

Le théorème d'unicité de Cantor (1845-1918) montre que, sur une certaine classe de fonctions, chaque fonction est caractérisée par la famille de ses coefficients de Fourier.

Plus tard, Fejér (1880-1959) précisera ce résultat en indiquant comment reconstruire la fonction à partir de ses coefficients.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et périodique, de période 1. La famille complexe $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f est sommable et
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2in\pi x}.$$

L'étude des séries trigonométriques trouvera sa place naturellement dans la théorie de l'intégrale de Lebesgue (1875-1941) et continue encore de faire l'objet de recherches.

Document 3 Séries de fonctions

Un petit nombre de fonctions peuvent être définies par une expression algébrique simple (combinaisons linéaires, produits, quotients, compositions... d'opérations algébriques ou de fonctions élémentaires). On peut définir un bien plus grand nombre de fonctions en le définissant comme **sommes** de séries de fonctions.

Ainsi, la fonction exp, qui n'est pas une fonction polynomiale, est définie comme la somme d'une série de fonctions polynomiales :
$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

❧ Étant données des fonctions $v_n : I \to \mathbb{C}$, on considère leurs **sommes partielles** définies par
$$\forall\, x \in I, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} v_n(x)$$
et, en supposant que la série $\sum v_n(x)$ converge pour *tout* $x \in I$, la **somme** des fonctions v_n définie par
$$\forall\, x \in I, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x).$$
Le premier objectif de l'**Analyse fonctionnelle** consiste à étudier à quelles conditions sur les fonctions v_n la somme $S : I \to \mathbb{C}$ ainsi définie est une fonction continue ou de classe $\mathscr{C}^1$.

❧ Par hypothèse, pour chaque valeur $x \in I$, la série de terme général $v_n(x)$ est convergente, de telle sorte que le reste
$$S(x) - S_N(x)$$
converge vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

On dit qu'il y a **convergence uniforme sur tout compact de** I lorsque, pour chaque segment $[a, b] \subset I$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle que
$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a, b], \quad \big|S(x) - S_N(x)\big| \leqslant \varepsilon_N.$$

L'épithète *uniforme* vient du fait que le majorant ε_N dépend nécessairement de N (il tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$), dépend peut-être des bornes a et b choisies, mais *ne dépend pas* de $x \in [a, b]$.

❧ On peut démontrer que :

1. *Si les fonctions v_n sont toutes continues sur l'intervalle I et s'il y a convergence uniforme sur tout compact de I, alors la somme S est une fonction continue sur I.*
2. *Si les fonctions v_n sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I et s'il y a convergence uniforme sur tout compact de I pour les sommes partielles S_N ainsi que pour leurs dérivées S'_N, alors la somme S est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que*

$$\forall\, x \in I, \quad S'(x) = \lim_{N\to+\infty} S'_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v'_n(x).$$

<u>Document 4</u> Règle de Leibniz

On suppose qu'une fonction à valeurs complexes

$$[t \mapsto \varphi(x, t)]$$

est intégrable sur l'intervalle I pour chaque valeur strictement positive du paramètre x. On peut donc étudier la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \int_I \varphi(x, t)\, dt$$

et en particulier chercher si cette fonction F est dérivable.

❧ Si $h \neq 0$, alors

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_I \frac{\varphi(x+h, t) - \varphi(x, t)}{h}\, dt$$

par linéarité de l'intégration et on peut imaginer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_I \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h, t) - \varphi(x, t)}{h}\, dt.$$

La théorie de l'intégrale de Lebesgue permet d'exploiter cette intuition et donne une condition suffisante pour que la fonction F soit de classe $\mathscr{C}^1$.

❧ En notant toujours I l'intervalle d'intégration, on suppose que :

1. pour tout $t \in I$, la fonction
$$[x \mapsto \varphi(x, t)]$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
2. pour tout $x > 0$, la fonction
$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right]$$
est continue sur I ;
3. quels que soient $0 < a < b$, il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}_+$, intégrable sur I, telle que
$$\forall\, x \in [a, b],\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant g(t). \qquad \text{(D)}$$

Dans ces conditions, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée a pour expression :

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\, dt.$$

❧ Il est essentiel de remarquer que la fonction g qui figure dans l'inégalité (D), dite **inégalité de domination**, est une fonction de t, *indépendante du paramètre* x, même si l'expression de g peut dépendre des réels a et b choisis.

❧ La règle de Leibniz donne une condition suffisante pour que la fonction F soit de classe $\mathscr{C}^1$: il ne s'agit en aucun cas d'une condition nécessaire et suffisante ! Il peut donc arriver que la fonction F soit de classe $\mathscr{C}^1$ et que sa dérivée ne soit pas égale à

$$\int_I \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\, dt.$$

Solution I ❁ Éléments inversibles de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

1. Quel que soit l'anneau $(A, \oplus, \otimes)$, l'ensemble $A^\times$ des éléments inversibles est un groupe multiplicatif (c'est-à-dire un groupe pour la loi $\otimes$).

2. Il s'agit à peu de choses près de l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd des entiers a et b, écrit sous la forme d'une fonction récursive. Au lieu de retourner le pgcd de ces deux entiers, il retourne un booléen, égal à `True` si, et seulement si, et seulement si, le pgcd est égal à 1. Autrement dit, la fonction sert à déterminer si deux entiers a et b sont premiers entre eux ou non.

3. On passe en revue les entiers compris entre 0 et $(N-1)$ (qui sont les représentants privilégiés des éléments de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$) et on conserve ceux qui sont premiers à N.

```
def inversibles(N):
  L = [ 1 ]
  for i in range(2, N):
    if premiers_entre_eux(i, N):
      L.append(i)
  return L
```

Pour gagner un peu de temps, on ne teste ni 0 (qui n'est jamais inversible), ni 1 (qui est toujours inversible).

4. Pour $N = 2$, on a $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times = \{1\}$ et l'ordre de ce groupe est égal à 1 (et donc impair).

Pour $N \geqslant 3$, on a $-1 \neq 1$ et $(-1)^2 = 1$, donc l'ordre de l'élément -1 est égal à 2. Or l'ordre d'un élément *divise* l'ordre du groupe (Théorème de Lagrange), donc l'ordre du groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ est *pair*.

5. a. Le nombre d'éléments de $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ est égal à $\varphi(24)$ (indicatrice d'Euler). Or $24 = 3 \times 8$, donc l'ordre de $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ est égal à

$$\varphi(24) = \varphi(3^1)\varphi(2^3) = (3-1) \times 2^2 \times (2-1) = 8.$$

Ces éléments sont les classes des entiers suivants :

$$1, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad 19 \quad \text{et} \quad 23$$

puisque la classe de x est inversible modulo N si, et seulement si, x et N sont premiers entre eux.

5. b. Si le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ est cyclique, alors il existe $x_0 \in (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ tel que

$$(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times = \{1, x_0, x_0^2, \dots, x_0^7\}$$

(puisque ce groupe est d'ordre 8).

Or $1^2 = 5^2 = 7^2 = 11^2 = 1 \pmod{24}$ et comme

$$13 = -11, \quad 17 = -7, \quad 19 = -5 \quad \text{et} \quad 23 = -1$$

dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, alors $13^3 = 17^2 = 19^2 = 23^2 = 1$, donc aucun élément de $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ n'engendre le groupe : ce groupe n'est donc pas cyclique.

6. a. Comme 29 est un entier premier, l'anneau $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ est en fait un *corps* et tous les éléments non nuls sont inversibles. Il y a donc exactement 28 éléments dans le groupe $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times$.

6. b. Il s'agit de prouver que le sous-groupe des puissances de 2 est égal à $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times$, c'est-à-dire

$$(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times = \{1, \dots, 28\} = \{2^k, \ k \in \mathbb{Z}\} = \langle 2 \rangle.$$

D'après le théorème de Lagrange, l'ordre d'un sous-groupe divise toujours l'ordre du groupe, donc l'ordre du sous-groupe $\langle 2 \rangle$ est un diviseur de 28. Comme $28 = 2^2 \times 7$, les valeurs possibles pour l'ordre de 2 sont donc :

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 7, \quad 14, \quad 28.$$

Il est clair que $2^1 \neq 1 \pmod{29}$. De même,

$$\begin{aligned}
2^2 &= 4 \neq 1 \pmod{29}\\
2^4 &= 16 \neq 1 \pmod{29}\\
2^7 = 2^1 \times 2^2 \times 2^4 &= 12 \neq 1 \pmod{29}\\
2^{14} = (2^7)^2 = 144 &= -1 \neq 1 \pmod{29}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la classe de 2 est bien un élément d'ordre 28 dans $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times$ et donc que la classe de 2 engendre ce groupe.

REMARQUE.— On s'est inspiré de l'algorithme d'exponentiation rapide pour calculer les puissances de 2.

REMARQUE.— On peut calculer toutes les puissances de 2 à l'aide du code Python suivant (qui ne sert qu'à éviter le côté fastidieux des calculs : il n'y a rien de difficile).

```
N, p, P = 29, 1, []
for i in range(1, N):
  p = (p*2)%N
  P.append(p)
```

Avec un peu de code en plus, on peut mettre en page le résultat.

k	2^k	k	2^k	k	2^k	k	2^k
1	2	8	24	15	27	22	5
2	4	9	19	16	25	23	10
3	8	10	9	17	21	24	20
4	16	11	18	18	13	25	11
5	3	12	7	19	26	26	22
6	6	13	14	20	23	27	15
7	12	14	28	21	17	28	1

6. c. On *sait* que deux groupes *cycliques* de même cardinal sont isomorphes. Or le groupe $(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}, \oplus)$ est cyclique d'ordre 28, engendré par la classe de 1 (c'est du cours) et d'après la question précédente, $[(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times, \otimes]$ est cyclique d'ordre 28, engendré par la classe de 2 : ces deux groupes sont donc isomorphes et un isomorphisme

$$\varphi \ : \ \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times$$

est donné par

$$\forall\, 0 \leqslant k < 28, \quad \varphi\big(\mathscr{C}_{28}(k)\big) = \mathscr{C}_{29}(2)^{\otimes k} = \mathscr{C}_{29}(2^k).$$

REMARQUE.— Deux groupes de même ordre ne sont pas toujours isomorphes ! Il est important d'insister sur le fait que les deux groupes considérés ici sont tous les deux *cycliques*.

❧ D'après le cours, $\mathscr{C}_{28}(k)$ engendre $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ (pour l'addition) si, et seulement si, k est premier à 28, c'est-à-dire si

$\mathscr{C}_{28}(k)$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$. Or $28 = 2^2 \times 7$, donc il y a

$$\varphi(28) = \varphi(2^2)\varphi(7) = 2 \times 6 = 12$$

générateurs du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}, \oplus)$.

L'isomorphisme φ induit une bijection entre les éléments générateurs de $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ et ceux de $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times$, donc il y a aussi 12 générateurs du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})\times$.

☙ Plus précisément, les générateurs de $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ sont :

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 9,\quad 11,\quad 13,\quad 15 = -13,$$
$$17 = -11,\quad 19 = -9,\quad 23 = -5,\quad 25 = -3,\quad 27 = -1$$

et les générateurs de $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times$ sont :

$$2^1,\quad 2^3 = 8,\quad 2^5 = 3,\quad 2^9 = 19,\quad 2^{11} = 18,\quad 2^{13} = 14,$$
$$2^{15} = -2 = 27,\quad 2^{17} = -8 = 21,\quad 2^{19} = -3 = 26,$$
$$2^{23} = -19 = 10,\quad 2^{25} = -18 = 11,\quad 2^{27} = -14 = 15.$$

(On a vu plus haut que $2^{14} = -1$.)

REMARQUE.— Ce dernier calcul des générateurs de $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times$ peut être fait de tête (procéder de proche en proche, en tâchant à chaque étape de poser les calculs qui soient les plus simples).

Solution II ❀ Formule sommatoire de Poisson

Partie A. Questions de cours

1. a. Comme $|\varphi|$ est, par hypothèse, continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \left|\varphi(t)\right| dt$$

est la limite de

$$\int_0^x \left|\varphi(t)\right| dt$$

lorsque x tend vers $+\infty$ (l'existence de cette limite est admise par l'énoncé).

REMARQUE.— D'après le cours, en supposant que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on sous-entend que φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE.— Comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $|\varphi|$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$ et en particulier intégrable sur le sous-intervalle $[0, +\infty[$: c'est pourquoi l'intégrale généralisée est convergente.

1. b. Comme $|\varphi|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, la relation de Chasles nous assure que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad y_n = \int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt - \int_0^{x_n} |\varphi(t)|\, dt.$$

Or x_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc

$$\int_0^{x_n} |\varphi(t)|\, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt$$

(Théorème de composition de limites, appliqué à la question précédente). Par conséquent, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

1. c. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction

$$\left[t \mapsto \varphi(t)e^{-ixt}\right]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de φ, *intégrable* sur $\mathbb{R}$, par une fonction *continue et bornée* sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad |e^{-ixt}| = 1.$$

Partie B. Formule sommatoire de Poisson

2. a. Soit $y \in \mathbb{R}$, fixé. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad f(t) = f(y) + \int_y^t f'(u)\, du$$

(Théorème fondamental de l'analyse). D'après l'Inégalité de la moyenne,

$$\forall\, t \geqslant y,\quad \left|f(y) - f(t)\right| = \left|\int_y^t f'(u)\, du\right| \leqslant \int_y^t \left|f'(u)\right| du$$

(les bornes de l'intégrale sont rangées par ordre croissant). En se restreignant à $t \in [y, y+1]$, on obtient enfin que

$$\left|f(y) - f(t)\right| \leqslant \int_y^{y+1} \left|f'(u)\right| du$$

puisque

$$\forall\, y \leqslant t \leqslant y+1,\quad 0 \leqslant \int_y^t g(u)\, du \leqslant \int_y^{y+1} g(u)\, du$$

pour toute fonction continue par morceaux et *positive* g.

2. b. D'après la question précédente et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\forall\, t \in [y, y+1],\quad \left|f(y)\right| &= \left|f(t) + f(y) - f(t)\right| \\ &\leqslant \left|f(t)\right| + \int_y^{y+1} \left|f'(u)\right| du.\end{aligned}$$

En intégrant cet encadrement par rapport à $t \in [y, y+1]$, on obtient

$$\left|f(y)\right| \leqslant \int_y^{y+1} \left|f(t)\right| dt + \int_y^{y+1} \left|f'(u)\right| du$$

(puisque le membre de gauche et le second terme du membre de droite sont *indépendants* de la variable d'intégration t et qu'on intègre sur un segment de longueur 1).

Comme la variable d'intégration est muette, on peut remplacer u par t dans la seconde intégrale.

3. Soient $x \in \mathbb{R}$, fixé, et $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles et la majoration du **2.b.**,

$$\begin{aligned}\sum_{p=-n}^{n} \left|f(x+p)\right| &\leqslant \sum_{p=-n}^{n} \int_{x+p}^{x+p+1} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt \\ &\leqslant \int_{x-n}^{x+n+1} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt.\end{aligned}$$

Par hypothèse, les fonctions f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, donc les fonctions $|f|$ et $|f'|$ sont *positives* et intégrables sur $\mathbb{R}$, donc il existe un réel

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f'(t)\right| dt$$

tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_{x-n}^{x+n+1} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt \leqslant M$$

et donc tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=-n}^{n} \left|f(x+p)\right| \leqslant M.$$

Cela prouve que la famille complexe $\big(f(x+p)\big)_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable (alinéa 2 du Document 1).

4. D'après la question précédente, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, les familles

$$\big(f(x+p)\big)_{p\in\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \big(f([x+1]+p)\big)_{p\in\mathbb{Z}}$$

sont sommables. Il s'agit maintenant de comparer leurs sommes.

On *sait* que, pour toute famille *sommable* $(u_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ et pour toute *bijection* $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, la famille $(u_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} u_{\varphi(p)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p.$$

Il est clair que l'application $\varphi = [p \mapsto p+1]$ réalise une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S(x+1) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} f([x+1]+p) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} f(x+[p+1]) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} f(x+p) = S(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction S est bien périodique, de période 1.

REMARQUE.— On peut aussi vérifier que $S(x+1) = S(x)$ en commençant par comparer les sommes partielles :

$$\begin{aligned} \sum_{p=-n}^{n} f(x+p+1) &= \sum_{p=-n+1}^{n+1} f(x+p) \\ &= f(x+n+1) - f(x-n) \\ &\qquad + \sum_{p=-n}^{n} f(x+p) \end{aligned}$$

et faire tendre n vers $+\infty$ en invoquant les alinéas 4 et 5 du Document 1.

5. a. Soit $x \in \mathbb{R}$, quelconque. Alors

$$\begin{aligned} S(x) - S_N(x) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=-n}^{n} f(x+p) - \sum_{p=-N}^{N} f(x+p) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=N+1}^{n} f(x+p) + \sum_{p=-n}^{-N-1} f(x+p) \end{aligned}$$

d'après le Document 1 (alinéa 5). Par inégalité triangulaire,

$$\left|S(x) - S_N(x)\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=N+1}^{n} \left|f(x+p)\right| + \sum_{p=-n}^{-N-1} \left|f(x+p)\right|.$$

Comme la fonction $|f| + |f'|$ est *positive* et intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \forall\, n \geqslant N, \quad \sum_{p=N+1}^{n} \left|f(x+p)\right| &\leqslant \int_{x+N+1}^{x+n+1} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt \\ &\leqslant \int_{x+N+1}^{+\infty} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt \end{aligned}$$

(même raisonnement qu'au **3.**) et de même,

$$\forall\, n \geqslant N, \quad \sum_{p=-n}^{-N-1} \left|f(x+p)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{x-N} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt.$$

En se restreignant à $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} \int_{x+N+1}^{+\infty} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt &\leqslant \int_{a+N}^{+\infty} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt \\ \int_{-\infty}^{x-N} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt &\leqslant \int_{-\infty}^{b-N} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt \end{aligned}$$

puisqu'on intègre une fonction *positive* et que

$$[x+N+1, +\infty[\subset [a+N, +\infty[$$
$$\text{et que} \quad]-\infty, x-N] \subset]-\infty, b-N].$$

Comme on a ainsi obtenu un majorant de

$$\sum_{p=N+1}^{n} \left|f(x+p)\right| + \sum_{p=-n}^{-N-1} \left|f(x+p)\right|$$

indépendant de n, on en déduit que

$$\begin{aligned} &\left|S(x) - S_N(x)\right| \\ &\quad \leqslant \int_{N+a}^{+\infty} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt + \int_{-\infty}^{-N+b} \left|f(t)\right| + \left|f'(t)\right| dt \end{aligned}$$

pour tout $x \in [a, b]$.

5. b. Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors les fonctions

$$[x \mapsto f(x+p)]$$

sont continues sur $\mathbb{R}$ pour chaque $p \in \mathbb{Z}$. En posant

$$v_0(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad v_n(x) = f(x+n) + f(x-n),$$

on définit des fonctions v_n continues sur $I = \mathbb{R}$ et on a bien

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} v_n(x).$$

❧ Par hypothèse, les fonctions f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la somme $|f| + |f'|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, d'après **1.b.**, le majorant obtenu à la question précédente tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, ce qui prouve que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x).$$

Par ailleurs, le majorant du **5.a.** dépend de a et de b, mais il est *indépendant* de $x \in [a, b]$. D'après le Document 3, cela signifie qu'il y a convergence uniforme sur tout compact de $I = \mathbb{R}$ et d'après l'alinéa 1 du Document 3, cela prouve que la fonction S est continue sur $I = \mathbb{R}$.

5. c. On reprend l'étude précédente pour appliquer l'alinéa 2 du Document 3 : comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, les fonctions v_n sont en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Comme f' et f'' vérifient les mêmes hypothèses que f et f', on déduit du **3.** que la famille $\big(f'(x+p)\big)_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable, ce qui permet de définir :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} f'(x+p).$$

On peut alors démontrer comme au **5.a.** que

$$\begin{aligned}\big|T(x) - S_N'(x)\big| \leqslant \int_{N+a}^{+\infty} \big|f'(t)\big| + \big|f''(t)\big|\, dt \\ + \int_{-\infty}^{-N+b} \big|f'(t)\big| + \big|f''(t)\big|\, dt\end{aligned}$$

pour tout $x \in [a, b]$ et tout $N \in \mathbb{N}$ et, comme plus haut, le majorant obtenu est *indépendant* de $x \in [a, b]$ et tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ (puisque f' et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}$). Cela signifie qu'il y a convergence uniforme sur tout compact de $I = \mathbb{R}$ pour les sommes partielles S_N ainsi que pour leurs dérivées S_N'. La fonction S est donc une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = T(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} f'(x+p)$$

(une nouvelle fois grâce à l'alinéa 5 du Document 1).

6. a. Par **5.b.**, la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction

$$\big[t \mapsto S(t)e^{-2in\pi t}\big]$$

est *continue* sur le *segment* $[0, 1]$, ce qui prouve que les coefficients c_n sont bien définis.

6. b. Par **5.c.**, la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et par **4.**, elle est périodique, de période 1.

D'après le Document 2, alinéa 1, les coefficients c_n sont les coefficients de Fourier de la fonction S. D'après l'alinéa 3 (Théorème de Féjer), la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2in\pi x}.$$

La formule sommatoire de Poisson est ainsi démontrée.

6. c. Quels que soient $(n, N) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, d'après l'Inégalité de la moyenne,

$$\begin{aligned}\left|c_n - \int_0^1 S_N(t)e^{-2in\pi t}\, dt\right| &= \left|\int_0^1 [S(t) - S_N(t)]e^{-2in\pi t}\, dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \big|S(t) - S_N(t)\big|\, dt\end{aligned}$$

puisque $|e^{-2in\pi t}| = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Posons

$$\varepsilon_N = \int_N^{+\infty} \big|f(t)\big| + \big|f'(t)\big|\, dt + \int_{-\infty}^{-N+1} \big|f(t)\big| + \big|f'(t)\big|\, dt.$$

D'après **5.a.** (avec $a = 0$ et $b = 1$), on a

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad \big|S(t) - S_N(t)\big| \leqslant \varepsilon_N$$

et on déduit de la majoration précédente que

$$\left|c_n - \int_0^1 S_N(t)e^{-2in\pi t}\, dt\right| \leqslant \varepsilon_N$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $N \in \mathbb{N}$.

6. d. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\big[t \mapsto f(t)e^{-2in\pi t}\big]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après **1.c.**) et

$$\int_{-N}^{N+1} f(t)e^{-2in\pi t}\, dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2in\pi t}\, dt$$

d'après **1.b.**

- Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_N(t)e^{-2in\pi t}\, dt &= \sum_{p=-N}^{N} \int_0^1 f(t+p)e^{-2in\pi t}\, dt \\ &= \sum_{p=-N}^{N} \int_p^{p+1} f(t)e^{-2in\pi t}\, dt\end{aligned}$$

par changement de variable affine $(t \leftarrow p+t)$, les fonctions $\big[t \mapsto e^{-2in\pi t}\big]$ étant périodiques, de période 1. D'après la relation de Chasles,

$$\int_0^1 S_N(t)e^{-2in\pi t}\, dt = \int_{-N}^{N+1} f(t)e^{-2in\pi t}\, dt$$

et, d'après la remarque préliminaire,

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(t)e^{-2in\pi t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2in\pi t}\, dt.$$

- L'encadrement du **6.c.** prouve que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(t)e^{-2in\pi t}\, dt = c_n$$

(puisque la suite $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers 0). Par unicité de la limite,

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2in\pi t}\, dt.$$

REMARQUE.— On interprète cette égalité en disant que les coefficients de Fourier c_n de la fonction périodique S sont des valeurs de la transformée de Fourier de la fonction intégrable f.

Partie C. Calcul d'une transformée de Fourier

7. Soit $x > 0$, *fixé*. Il est clair que la fonction

$$\left[t \mapsto \varphi(x,t) = \frac{x}{x^2+t^2}e^{it}\right]$$

est continue sur $]-\infty, +\infty[$ (produit d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et d'une exponentielle). Il reste donc à étudier cette fonction aux voisinages de $\pm\infty$.

Lorsque t tend vers $\pm\infty$,

$$\left|\varphi(x,t)\right| = \frac{x}{x^2+t^2} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big).$$

Or la fonction $[t \mapsto 1/t^2]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$, donc la fonction

$$\left[t \mapsto \varphi(x,t) = \frac{x}{x^2+t^2}e^{it}\right]$$

est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$.

8. a. Pour tout $x \in [a, b]$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$0 < x \leqslant b \quad \text{et} \quad x^2+t^2 \geqslant a^2+t^2 > 0$$

donc

$$\left|\varphi(x,t)\right| = \frac{x}{x^2+t^2} \leqslant \frac{b}{a^2+t^2}.$$

8. b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Il est clair que la fonction

$$\left[x \mapsto \varphi(x,t) = \frac{x}{x^2+t^2}e^{it}\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (en tant que fonction de x seulement, c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne peut s'annuler qu'en $x = 0$) et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \frac{(t^2-x^2)e^{it}}{(x^2+t^2)^2}.$$

Par inégalité triangulaire, quels que soient $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$|t^2 - x^2| \leqslant |t^2| + |x^2| = t^2 + x^2$$

et par conséquent,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{|x^2-t^2|}{(x^2+t^2)^2} \leqslant \frac{1}{x^2+t^2}.$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in [a, +\infty[,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{a^2+t^2}$$

et *a fortiori* que

$$\forall\, x \in [a, b],\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{a^2+t^2}.$$

9. On a vérifié que la fonction $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ était intégrable sur $I =]-\infty, +\infty[$ pour chaque $x > 0$ au **7.**

On a démontré au **8.b.** que :

1. pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto \varphi(x,t)]$ était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle) ;
2. pour tout $x > 0$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

était continue sur I (puisque de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle) ;

3. et que, quels que soient $0 < a < b$,

$$\forall\, x \in [a,b],\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{a^2+t^2}.$$

Comme la fonction majorante

$$\left[t \mapsto \frac{1}{a^2+t^2}\right]$$

est indépendante du paramètre x et qu'elle est intégrable sur $I = \mathbb{R}$ (cf. **7.**), le Document 4 nous assure que la fonction définie par

$$\forall\, x > 0, \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,t)\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t^2-x^2)e^{it}}{(x^2+t^2)^2}\,dt$$

pour tout $x > 0$.

10. On reprend l'étude précédente avec $\partial\varphi/\partial x$ à la place de φ !

- Pour tout $x > 0$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur $I =]-\infty, +\infty[$ (établi à la question précédente).

- Pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{2x(x^2-3t^2)e^{it}}{(x^2+t^2)^3}.$$

- Pour tout $x > 0$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right]$$

est continue sur $I =]-\infty, +\infty[$ (en tant que produit d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et d'une exponentielle).

- Enfin, quels que soient $0 < a < b$ et $t \in I$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| &= \frac{2x\,|x^2-3t^2|}{(x^2+t^2)^3}\\ &\leqslant \frac{6x(x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^3}\\ &\leqslant \frac{6b}{(a^2+t^2)^2}\end{aligned}$$

pour tout $x \in [a, b]$. La fonction majorante est bien *indépendante* du paramètre x ; en tant que fonction de t, elle est continue sur $I =]-\infty, +\infty[$ (en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et est $\mathcal{O}(1/t^4)$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, donc elle est bien intégrable sur I.

On peut donc appliquer une seconde fois la règle de Leibniz (Document 4) et en déduire que la fonction g' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que

$$\forall\, x > 0, \quad g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t)\, dt.$$

11. a. On a calculé précédemment :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big) = \frac{2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3}.$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big) = \frac{-2tx}{(x^2 + t^2)^2},$$

alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big) = \frac{-2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^2}$$

et donc

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big) = 0$$

quels que soient $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}$.

11. b. D'après **10.**, pour tout $x > 0$,

$$g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big)\, dt$$

et d'après **11.a.**,

$$g''(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big)\, dt.$$

☙ On intègre une première fois par parties. On choisit

$$\Big[t \mapsto \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big)\Big]$$

comme primitive de

$$\Big[t \mapsto \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big)\Big].$$

D'après **11.a.**, cette primitive est continue sur $\mathbb{R}$, tend vers 0 en $\mathcal{O}(1/t^3)$ lorsque $t \to \pm\infty$: cette primitive est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \Big[e^{it} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big)\Big]_A^B = 0,$$

ce qui permet de déduire de la formule d'intégration par parties que

$$g''(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big)\, dt.$$

☙ On intègre par parties une deuxième fois en choisissant

$$\Big[t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2}\Big]$$

comme primitive de

$$\Big[t \mapsto \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big)\Big].$$

Cette primitive est continue sur $\mathbb{R}$, tend vers 0 en $\mathcal{O}(1/t^2)$ lorsque $t \to \pm\infty$: cette primitive est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \Big[e^{it}\Big(\frac{x}{x^2 + t^2}\Big)\Big]_A^B = 0,$$

ce qui permet de déduire de la formule d'intégration par parties que

$$\forall\, x > 0, \quad g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{x}{x^2 + t^2}\, dt = g(x).$$

12. a. Comme $x > 0$, on peut poser $t = xu$ (changement de variable affine) pour obtenir $dt = x\, du$ et

$$\forall\, x > 0, \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2}\, du.$$

REMARQUE.— Comme il s'agit d'un changement de variable affine (et même linéaire), il n'est pas exigé de préciser que la fonction

$$\theta = [u \mapsto xu]$$

est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que $\theta'(u) = x$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Il est cependant essentiel d'en être conscient (pour *savoir ce que l'on fait*).

12. b. Soit $x > 0$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\Big|\frac{e^{ixu}}{1 + u^2}\Big| = \frac{1}{1 + u^2}$$

et comme la fonction (de référence) $\big[u \mapsto \frac{1}{1+u^2}\big]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit de l'Inégalité de la moyenne que

$$\forall\, x > 0, \quad |g(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\frac{e^{ixu}}{1 + u^2}\Big|\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \pi$$

ce qui prouve que g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

12. c. Comme on ne compare bien que ce qui est comparable, on va se servir du calcul précédent pour mettre la différence sous une forme exploitable :

$$g(x) - \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2}\, du - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu} - 1}{1 + u^2}\, du.$$

On applique l'Inégalité de la moyenne :

$$|g(x) - \pi| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{ixu} - 1|}{1 + u^2}\, du$$

puis la relation de Chasles à la décomposition :

$$]-\infty,+\infty[\,=\,]-\infty,-A]\cup[-A,A]\cup[A,+\infty[.$$

❧ Pour $u \leqslant -A$ et pour $u \geqslant A$, il est clair que

$$|e^{ixu}-1| \leqslant |e^{ixu}|+|1| = 2$$

donc, par parité,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-A}\frac{|e^{ixu}-1|}{1+u^2}\,du+\int_{A}^{+\infty}\frac{|e^{ixu}-1|}{1+u^2}\,du &\leqslant 2\int_A^{+\infty}\frac{2}{1+u^2}\,du\\ &\leqslant 4\Big[\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan} A\Big] = 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{A}\end{aligned}$$

d'après la célèbre relation

$$\forall\, A>0,\quad \operatorname{Arctan} A+\operatorname{Arctan}\frac{1}{A}=\frac{\pi}{2}.$$

❧ D'autre part, d'après l'énoncé,

$$\forall\, u\in[-A,A],\quad |e^{ixu}-1|\leqslant|xu| = x|u|.$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A}\frac{|e^{ixu}-1|}{1+u^2}\,du &\leqslant \int_{-A}^{A}\frac{x|u|}{1+u^2}\,du\\ &\leqslant x\int_0^A\frac{2u\,du}{1+u^2} = x\,\ell n(1+A^2).\end{aligned}$$

❧ On obtient donc bien que

$$\big|g(x)-\pi\big| \leqslant x\,\ell n(1+A^2)+4\operatorname{Arctan}\frac{1}{A}$$

pour tout $x>0$ et tout $A>0$.

REMARQUE.— L'inégalité admise par l'énoncé est une conséquence de l'Inégalité des accroissements finis.

❧ On choisit $\varepsilon>0$. Lorsque A tend vers $+\infty$, l'expression $4\operatorname{Arctan} {}^1\!/_A$ tend vers 0, donc en choisissant A assez grand, on a

$$0\leqslant 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{A}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour *cette* valeur de A (*fixée*, donc), l'expression $x\,\ell n(1+A^2)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et par conséquent, il existe $x_0>0$ tel que

$$\forall\, 0<x<x_0,\quad 0\leqslant x\,\ell n(1+A^2)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, x_0>0,\ \forall\, 0<x<x_0,\quad |g(x)-\pi|\leqslant\varepsilon,$$

ce qui signifie précisément que $g(x)$ tend vers π lorsque x tend vers 0.

REMARQUE.— Si on est savant, on peut déduire cette propriété du Théorème de convergence dominée.

12. d. D'après **11.b.**, il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, x>0,\quad g(x)=Ae^{-x}+Be^{x}.$$

D'après **12.b.**, la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $B=0$. D'après **12.c.**, la fonction g tend vers π au voisinage de 0, donc $A=\pi$. Ainsi,

$$\forall\, x>0,\quad g(x)=\pi e^{-x}.$$

13. Pour $x>0$, la transformée de Fourier $T(x)$ est égale à $g(x)$ (d'après **12.a.**) et donc à πe^{-x} d'après **12.d.**

❧ Pour $x=0$, on *sait* que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\pi,$$

ce qui prouve que T est continue à droite en 0.

❧ Enfin, si $x<0$, alors $-x>0$ et donc

$$T(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i(-x)u}}{1+u^2}\,du=\overline{T(-x)}=\pi e^{-(-x)}=\pi e^{x}.$$

La transformée de Fourier T est donc continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad T(x)=\pi e^{-|x|}.$$

Partie D. Application

14. Le membre de gauche de l'identité est l'expression $S(x)$ associée à la fonction f définie par

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{\alpha^2+x^2}.$$

Comme $\alpha>0$, il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et intégrable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, les dérivées première et seconde de f :

$$f'(x)=\frac{-2x}{(\alpha^2+x^2)^2}\quad\text{et}\quad f''(x)=\frac{2(3x^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+x^2)^3}$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (calculs faits au **11.a.** avec des notations différentes ; intégrabilité justifiée au **11.b.**).

On déduit de la formule sommatoire de Poisson, établie au **6.b.**, que

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad \sum_{p\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\alpha^2+(x+p)^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{2in\pi x}$$

avec, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$c_n=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-2in\pi t}\,dt=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(-2n\pi\alpha)u}}{1+u^2}\,du$$

(changement de variable affine $u={}^t\!/_\alpha$ avec $\alpha>0$), donc

$$\forall\, n\in\mathbb{Z},\quad c_n=\frac{1}{\alpha}T(-2n\pi\alpha)=\frac{\pi e^{-2|n|\pi\alpha}}{\alpha}.$$

Par parité de T, on remarque donc que $c_n=c_{-n}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. D'après l'alinéa 5 du Document 1, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{2in\pi x} &= c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\big(e^{2in\pi x}+e^{-2in\pi x}\big)\\ &= c_0+\frac{2\pi}{\alpha}\,\mathfrak{Re}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-2n\pi\alpha}e^{2in\pi x}\\ &= \frac{\pi}{\alpha}+\frac{\pi}{\alpha}\,\mathfrak{Re}\,\frac{2e^{2\pi(ix-\alpha)}}{1-e^{2\pi(ix-\alpha)}}\end{aligned}$$

en reconnaissant une série *géométrique* dont la raison a pour module $e^{-2\pi\alpha}\in\,]0,1[$. (Il faut faire un brouillon pour penser à placer le facteur 2 au numérateur !)

En multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur, on obtient

$$\mathfrak{Re}\,\frac{2e^{2\pi(ix-\alpha)}}{1-e^{2\pi(ix-\alpha)}} = \frac{(e^{2\pi\alpha}-\cos 2\pi x)\cos 2\pi x - \sin^2 2\pi x}{e^{2\pi\alpha}(\operatorname{ch} 2\pi\alpha - \cos 2\pi x)} = \frac{\cos 2\pi x - e^{-2\pi\alpha}}{\operatorname{ch} 2\pi\alpha - \cos 2\pi x}$$

donc

$$1 + \mathfrak{Re}\,\frac{2e^{2\pi(ix-\alpha)}}{1-e^{2\pi(ix-\alpha)}} = \frac{\operatorname{sh} 2\pi\alpha}{\operatorname{ch} 2\pi\alpha - \cos 2\pi x}$$

et enfin

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha^2+(x+p)^2} = \frac{\pi}{\alpha}\,\frac{\operatorname{sh}(2\pi\alpha)}{\operatorname{ch}(2\pi\alpha)-\cos(2\pi x)}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque.— On déduit de cette identité que

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha^2+(x+p)^2} \sim \frac{\pi}{\alpha}$$

lorsque $\alpha \to +\infty$ et que, lorsque $\alpha \to 0$, si $0 < x < 1$:

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha^2+(x+p)^2} \sim \frac{2\pi^2}{1-\cos 2\pi x}$$

et si $x = 0$:

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha^2+(x+p)^2} \sim \frac{1}{\alpha}$$

(cette dernière propriété étant assez facile à prouver par ailleurs).